1808
2008
200 Jahre
amtliche Statistik in Bayern.

Bayerisches Landesamt für
Statistik und Datenverarbeitung

Beiträge zur Statistik Bayerns
Heft 538 | Dezember 2008

Statistik und Leibrente?

Entwicklungsgeschichtliches zu Sterbetafeln als
wichtigstes demographisches Hilfsmittel.
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Lebensversicherung.
Interessantes aus der Geschichte der Rechentechnik.

Impressum

Statistik und Leibrente?
Beiträge zur Statistik Bayerns, Heft 538

Erschienen im Dezember 2008
Preis 12,50 Euro

Verleger, Herausgeber und Druck
Bayerisches Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung
Neuhauser Straße 8, 80331 München
Briefanschrift: 80288 München

Bestellungen
Telefon: 089 2119-205
Telefax: 089 2119-457
E-Mail: vertrieb@statistik.bayern.de
Internet: www.statistik.bayern.de

Statistik und Leibrente?

Entwicklungsgeschichtliches
zu Sterbetafeln als wichtigstes demographisches Hilfsmittel.
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Lebensversicherung.
Interessantes aus der Geschichte der Rechentechnik.

Erschienen 2008,
im 200. Jahr der amtlichen Statistik in Bayern
und im Jahr der Mathematik.

Herausgegeben vom Bayerischen Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung
München, 2008

Vorwort

Zu den großen Errungenschaften unserer Zivilisation zählt der Zugewinn an Langlebigkeit der Menschen. Immer mehr Menschen erreichen heutzutage ein hohes Alter. Die längere Lebenszeit ist einerseits erfreulich, sie hat aber andererseits auch ihren Preis, und so kommt dem Kapitalbedarf im Alter ein bedeutender Stellenwert zu. Es überrascht daher nicht, dass die Altersvorsorge zu den drängenden Problemen gezählt wird. Die gebräuchlichste Form der privaten Rentenversicherung ist die Leibrente (Lebensrente), die bis zum Lebensende des Versicherten bezahlt wird. Lebenserwartung und Leibrente – eine Alliteration? Die Lebenserwartung und der Zinsfuß prägen die Höhe einer Leibrente.
Den Sterbetafeln, die das wichtigste demographische Hilfsmittel sind, können die Angaben zur Lebenserwartung entnommen werden. Die für Leibrentengeschäfte nötigen Versicherungsbarwerte gewinnt man anhand der Absterbeordnung einer Sterbetafel (Überlebende im Alter x). Für Bevölkerungsprognosen sind Sterbetafeln ebenfalls eine wichtige Grundlage. Selbstverständlich muss das Instrument Sterbetafel auf sicheren Daten beruhen. Für Amartya Sen, Nobelpreisträger für Wirtschaftswissenschaften 1998, erweisen sich Sterblichkeitsdaten als wichtige Ergänzung der ökonomischen Analyse.
Die Bedeutung von Sterbetafeln hob schon der große Mathematiker und Astronom Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) hervor. Bemerkenswert ist, dass die Lebensversicherung, die sich aus dem mittelalterlichen Leibrentengeschäft entwickelte, zu den ersten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Wirtschaftsleben zählt.
Der ehemalige Vorstand des Bayerischen Statistischen Bureaus, Friedrich Benedikt von Hermann (1795 - 1868), bemerkte zu Sterbetafeln (damals Mortalitäts-Tafeln genannt): „Man kann diese gewissermaßen als das eigentliche Ziel und Ende aller Erhebungen über die Bewegung der Bevölkerung ansehen."
Die Frage nach der Dauer des menschlichen Lebens hat von jeher eine große Rolle gespielt. Zu diesem Themenkreis veröffentlichte das Bayerische Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung in den Jahren 2004 bis 2008 in loser Folge verschiedene Beiträge, die sich mit dem Umfeld und der geschichtlichen Entwicklung der Sterbetafeln und der Bewertung von Leibrenten befassten. Diese werden hier in kompakter Form zusammengefasst und sollen einem interessierten Kreis zur Verfügung stehen.
Ergänzend wurde als Anhang die aktuelle vom Bayerischen Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung erstellte Sterbetafel 2003/05 abgedruckt. Beigefügt wurde eine Tabelle mit Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerten einer lebenslänglichen, jährlich vorschüssig zahlbaren Rente nach der bayerischen Sterbetafel 2003/05 (Zinssatz 3 %). Darüber hinaus finden sich im Anhang Bilder und Übersichten, die neu aufgenommen wurden.

München, im Dezember 2008

Karlheinz Anding
Präsident des Bayerischen Landesamts für Statistik
und Datenverarbeitung

Der Autor der Beiträge, Helmut Hirtz, ist im Bayerischen Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung im Bereich mathematisch-statistische Methoden beschäftigt. Hier ist er u.a. zuständig für die Berechnung der bayerischen Sterbetafeln.

Inhalt

In Klammern sind die Ausgaben von „Bayern in Zahlen“ angegeben, in denen die hier zusammengefassten Aufsätze erschienen sind.

Quinten (Quentin) Massys (Matsys, Metsys): Der Geldverleiher und seine Frau (1514; Louvre, Paris), auch als „Der Goldwäger und seine Frau“ bezeichnet.
Quelle: www.kunstbilder-galerie.de/gfx/paintings/std/quentin-massys-der-goldwaeger-und-seine-frau-06282.jpg

Leibrente - ein einfacher Begriff mit komplexem Hintergrund

Die Absenkung der Leistungen öffentlicher Versorgungseinrichtungen erfordert eine ergänzende private Vorsorge für das Alter. Eine Mischung der für die Altersvorsorge in Frage kommenden Anlagemöglichkeiten ist immer noch ein probates Mittel. In bestimmten Fällen könnten dazu auch Kaufgeschäfte auf Leibrentenbasis zählen. Allerdings mangelt es hierfür an aktuellen Datennachweisen für Deutschland. Die derzeit verfügbaren Zahlen stützen sich auf die „Allgemeine Sterbetafel 1986/88" für die Bundesrepublik Deutschland mit dem Gebietsstand vor dem 3.10.1990. Der nachfolgende Beitrag schlägt einen kurzgefassten Bogen über die geschichtliche Entwicklung der Sterbetafeln und – auf dieser Basis – der Berechnung von Leibrenten.

Sterbetafel: Basis für Leibrenten

Für Bayern wurde im August 2001 eine Sterbetafel für 1996/98 veröffentlicht, die den gleichen Aufbau hat wie die Allgemeine Sterbetafel 1986/88. Anstelle von Volkszählungsergebnissen wurden die Daten aus der Bevölkerungsfortschreibung herangezogen.

Es braucht nicht besonders betont zu werden, dass Sterbetafeln oder Überlebendentafeln eine wesentliche Entscheidungsgrundlage in Politik und Wirtschaft sind. Sie geben Aufschluss über die Sterblichkeit der Bevölkerung insgesamt und in jeder Altersstufe. Eine Sterbetafel enthält neben den einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten auch die Absterbeordnung (Anzahl der Überlebenden) sowie die mittlere Lebenserwartung in jedem Alter. Außerdem lässt sich mit ihr die wahrscheinliche Lebensdauer berechnen [1]. Es mag auch interessieren, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Alter, das durch die mittlere Lebenserwartung in Aussicht gestellt wird, erreicht werden kann. Eine Antwort findet sich durch die Berechnung der betreffenden Überlebenswahrscheinlichkeit.

Eine Sterbetafel kann auch helfen, das durch vorzeitigen Tod (Unfall, Suizid etc.) verursachte Defizit an Lebenszeit zu quantifizieren. Die verlorenen Lebensjahre können mit der ferneren mittleren Lebensdauer oder der mittleren Lebenserwartung geschätzt werden. Zum Beispiel hätte eine bei einem Unfall im Alter von 20 Jahren zu Tode gekommene männliche Person noch eine durchschnittliche Lebenserwartung von 55,4 Lebensjahren gehabt (Bayerische Sterbetafel 1996/98).

Die bayerische Sterbetafel 1996/98 erfüllt zwei wichtige Forderungen: zum einen liegt ihr ein geeigneter Beobachtungszeitraum[1] zugrunde und zum andern ist die Ausgleichsrechnung zufriedenstellend. A propos Ausgleichung: Vor mehr als einem halben Jahrhundert wünschte man schon, die ganze Sterbetafel vom Alter 0 bis 100 nach derselben Methode ausgleichen zu können (siehe Schweizerische Volkssterbetafeln 1931/41 und 1939/44 S. 78* [2]). Heutzutage ist uns dies dank der Spline-Funktionen möglich.[2]

Damit war die Möglichkeit einer Berechnung von Kommutationszahlen und Barwerten im Zeitvergleich gegeben. Üblicherweise wurden bisher derartige Berechnungen nur auf Bundesebene vorgenommen. Da an unser Amt immer wieder Anfragen nach solchen Angaben für Leibrentenverträge gerichtet wurden, entschloss man sich für eine probeweise Berechnung der genannten Daten. Die Rechenergebnisse entsprachen den Erwartungen, dass aktuellere Barwerte ihrem Wert nach höher ausfallen müssten. Dies bedeutet, dass neu abzuschließende Kaufgeschäfte mit einer niedrigeren Leibrente auszustatten wären. Nun stellte sich die Frage nach der weiteren Verwertung der gewonnenen Daten: „intra muros" oder „Eprouvette"[3]? Die Tabelle (S. 11) zeigt für die Altersjahre 0 bis 100 die berechneten Daten für den Zinssatz 3%.

1 Nicht nur bei Indexberechnungen muss ein passendes Basisjahr ausgewählt werden.
2 Die Nulljährigen sind als Sonderfall nicht in die Glättung einzubeziehen.
3 Nicht öffentlich oder ein Proberöhrchen.

Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte wurden schon vor mehr als zweihundert Jahren berechnet, um Leibrenten richtig zu bewerten. In Deutschland war auf diesem Gebiet Johann Nicolaus Tetens (1736 - 1807) Wegbereiter. Er veröffentlichte 1785/86 ein zweibändiges Werk mit dem Titel *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen* mit Tabellen zum practischen Gebrauch. Bekannter sind seine philosophischen Schriften, die neben denen von Leonhard Euler, den Kritizismus des vor 200 Jahren verstorbenen Immanuel Kant beeinflussten.

Über Lorenzo Tonti (um 1630 - 1695) wurde berichtet, dass er im Jahr 1653 Kardinal Mazarin zur Sanierung der Staatsfinanzen Frankreichs eine Anleihe vorschlug, die später als „Tontine" bekannt wurde. Dabei handelte es sich um eine Art Leibrente.

Erste Ansätze für die Bewertung von Leibrenten unter Berücksichtigung der Sterblichkeit und des Zinssatzes finden sich bei Johan de Witt (1625 - 1672). Im Jahr 1671 erschien seine Abhandlung *Waerdye van Lyf-Renten* (s. S. 143). Die gerechte Berechnung der Renten ist nicht erst ein Anliegen unserer Zeit.

Ergänzende finanzielle Altersvorsorge

In Deutschland beruht die gesetzliche Rentenversicherung auf dem sogenannten Umlageverfahren; das bedeutet: die erwerbstätige Generation kommt für die Rente der Ruheständler auf („Generationenvertrag"). In seinem in der F.A.Z. vom 1. November 2003 abgedruckten Beitrag *Der dünne Ast der Altersvorsorge* erwähnt der Autor Thomas Apolte, dass Paul Samuelson 1958 in einem Aufsatz bemerkte, dass die Renten der ersten Rentnergeneration wie „Manna vom Himmel" fielen. Ende des Zitats. Heute besteht eine Begünstigung für die vorzeitigen Rentenbezieher dadurch, dass die Lebensarbeitszeit außen vor bleibt.

Durch die höhere Lebenserwartung und die geringe Geburtenrate verschiebt sich das Verhältnis zwischen Jung und Alt jedoch zunehmend. Es soll dahingestellt bleiben, welche Probleme sich ergeben würden, wenn die Geburten zwar höher ausfielen, dafür aber für die nachwachsende Generation nur geringe Chancen auf Beschäftigung gegeben wären.

Weiter steigende Lebenserwartung? Manchmal möchte man fast geneigt sein, dass es sich mit den Annahmen über eine weiter ansteigende mittlere Lebenserwartung fast ähnlich verhält wie in Übertreibungsphasen an den Börsen: man glaubt den gerade bestehenden Trend fortschreiben zu können. Es sei an die Situation in den 70er Jahren des vorhergehenden Jahrhunderts erinnert, wo unterschiedliche Auffassungen über die weitere Entwicklung der Lebenserwartung bestanden. Heute kann man fragen, wie sich zum Beispiel die Ernährungsgewohnheiten auf die künftige Lebenserwartung auswirken werden.

Der Umbau der sozialen Sicherungssysteme – wirtschaftlich notwendig und politisch angestrebt – erfordert mehr private Vorsorge vom Einzelnen. Den erfreulichen Aussichten auf ein längeres Leben stehen komplexe Finanzierungsfragen gegenüber. Höhere Lebenserwartung und steigende Gesundheitskosten erfordern im Alter einen nicht unerheblichen Kapitalstock. Den erfreulichen Aussichten auf ein längeres Leben stehen damit komplexe Finanzierungsfragen gegenüber.

Leider gibt es kein Patentrezept für eine passende Altersversorgung. Am Beginn des neuen Jahrtausends kam es auf internationaler Ebene zu einer heftigen Börsenkorrektur. Dabei spielten mehrere Ereignisse zusammen: Spekulationsblase, Betrügereien Kapital sammelnder Institutionen und ein unprofessionelles Verhalten der institutionellen Anleger. Dann bewegte sich die Börse zwischen Deflations- und Inflationsangst. Diese Geschehnisse machen die Auswahl geeigneter Vorsorgemaßnahmen für den letzten Lebensabschnitt nicht ganz leicht. Ein Problem b ei der Bewertung privater Finanzangelegenheiten sind Rechentechnik und Zinsfaktoren.

In der F.A.Z. vom 13.6.2003 war zu lesen, dass die Deutschen erhebliche Wissenslücken haben, wenn es um Themen wie private Vorsorge oder Geldanlage geht. Dass die Deutschen sich zu wenig um die private Altersvorsorge kümmern, zeigte eine Repräsentativbefragung, die vom Forschungsinstitut NFO Infratest im Auftrag der Commerzbank durchgeführt wurde. In ihrer Ausgabe vom 12. November 2003 versah die F.A.Z. einen Beitrag mit der Überschrift *Um die finanzielle Allgemeinbildung ist es schlecht bestellt*. Im Frühjahr 2004 brachte die Bertelsmann-Stiftung eine Studie heraus mit dem drastischen Titel *Finanzieller Analphabetismus in Deutschland*.

Wenn auch die Existenz eines Kapitalmarkts unentbehrlich ist, so ist ihm doch eigen, dass er der sensibelste oder – wenn man will – der volatilste Markt der Welt ist. Krisen an den Finanzmärkten treten immer wieder in der einen oder anderen Form in Erscheinung – Krise und Katharsis sind ein bekanntes

Phänomen. Bei der Vorsorge für das Alter sollte noch immer eine alte Regel gelten: Breit streuen wie der Bauer den Mist. Schon der Talmud spricht sich für die Diversifikation aus: ein Drittel in Geschäfte, ein Drittel in Land und ein Drittel in Geld. Heute bevorzugt man die moderne Portfoliotheorie und glaubt, mit etwas Mathematik könne man sich gegen Risiken absichern. Alain Connes bemerkte in seinem Aufsatz *Scheinwerfer auf die Realität* in der F.A.Z. vom 26. Februar 2000 (deutsche Bearb. von Jochen Brüning): „ … ist es selbst für Fachleute überraschend, dass komplizierte stochastische Differentialgleichungen die Finanzmärkte bewegen …“

Voltaire (1694 - 1778) wusste „Es ist leichter, über Geld zu schreiben, als Geld zu machen.“ Er erhielt eine königliche Pension und begründete durch Finanzspekulationen seine Unabhängigkeit. Friedrich dem Großen soll er bei Devisengeschäften zur Seite gestanden haben.

Zu Geldgeschäften äußerte sich Cicero (106 - 43 v.Chr.) in seiner Schrift *Vom pflichtgemäßen Handeln* (De off. II 24,87) folgendermaßen [4]: „Aber über diesen ganzen Bereich, über den Erwerb, die Anlage von Geld – ich wollte auch über seine Verwendung! –, wird vielleicht treffender von manchen hervorragenden Leuten, die beim mittleren Janusbogen sitzen, als von irgendwelchen Philosophen in irgendeiner Schule eine Erörterung geführt werden.“

Nicht schlecht beraten ist man mit einem Ausspruch von Platon: „Besser sterbend den Gegnern etwas hinterlassen als lebend die Freunde anbetteln.“

Leibrente – eine altersunabhängige Alternative

Unter „Leibrente“ wird eine Rente verstanden, bei der die Anzahl der Zahlungsleistungen dadurch begrenzt ist, dass die Zahlungen beim Eintritt eines bestimmten Ereignisses (meist der Tod des Rentenempfängers) eingestellt werden.

Von der rechtlichen Seite her steht der Begriff Leibrente im Zusammenhang mit verschiedenen Rechtsgebieten, zum Beispiel mit dem Zivilrecht und dem Familienrecht.

Lebenserwartung und Leibrente – eine Alliteration? In bestimmten Fällen können Kaufgeschäfte auf Leibrentenbasis Bestandteil einer Vorsorge für das Alter sein. Ein Immobiliengeschäft auf Rentenbasis kann für den Käufer und Verkäufer gleichermaßen attraktiv sein – eine erstrangige Absicherung (Eintragung im Grundbuch) vorausgesetzt. Die möglichen Auswirkungen der demographischen Entwicklung auf die Immobilienmärkte sollen hier außer Betracht bleiben. Keine Einlassung auch auf den Unterschied zwischen Wert und Preis einer Immobilie.

Immer wieder erreichen unser Amt Anfragen, die sich auf die noch zu erwartende Lebenszeit einer Person eines bestimmten Alters und/oder auf die Höhe einer Leibrente beim Kauf oder Verkauf eines Hauses beziehen. Hierbei greift man auf Bundesergebnisse zurück. Einschlägige Tabellen stehen für diese Zwecke zur Verfügung. Allerdings beruhen die Daten auf der Grundlage der letzten „Allgemeinen Sterbetafel 1986/88“ und liegen damit mehr als 15 Jahre zurück (siehe *Allgemeine Sterbetafel für die Bundesrepublik Deutschland.* Gebietsstand vor dem 3.10.1990, Fachserie 1, Reihe 1. S. 2, S. 32 ff. und S. 52 ff.).

Da das Sterbealter eines Menschen unbekannt ist, muss man sich auf Wahrscheinlichkeiten stützen. Dabei ist eine Überlebenden-Tafel sehr hilfreich. Nach der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die Dauer eines menschlichen Lebens ein Zufallsereignis ebenso wie das Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel. Nach Laplace sind die wichtigsten Fragen im Leben zum größten Teil nur Probleme der Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten. Für eine angemessene Bewertung der Leibrenten steht die Zinseszinsrechnung zur Verfügung.

In gewisser Weise haben Leibrentenverträge mit bestimmten Versicherungsverträgen etwas gemeinsam. Ein Anwendungsgebiet der Zinseszinsrechnung sind die verschiedenen Formen der Lebensversicherung. Bei diesen unterscheidet man u.a. eine Versicherung auf den Todes- und Erlebensfall, eine Invaliden- und Altersversicherung oder Sparrentenversicherung. Zwischen den Zahlungen der Versicherungsnehmer und den Leistungen einer Versicherungsanstalt muss Gleichwertigkeit bestehen, soll der Vertrag für keinen der Beteiligten zum Nachteil werden. Selbstverständlich kann dies nur für die Gesamtheit der Versicherungsnehmer gelten, nicht für einen einzelnen. Für die Einhaltung des Gleichwertigkeitsprinzips bedarf es neben der Zinseszins- und Rentenrechnung u.a. bevölkerungsstatistischer Annahmen.

Zur Ermittlung der Risikoprämie dienen Statistiken. Für eine Lebensversicherung ist eine hervorragende Schadenstatistik eine Volkssterbetafel (allgemeine Sterbetafel wie sie bisher jeweils nach einer Volkszählung erstellt wurde; im Unterschied zu einer Versicherten-Sterbetafel). Selbstverständlich benötigt man dazu ein aktuelles Datenmaterial. Wenngleich der Schleier vor der Zukunft nicht gelüftet werden kann, so sollen Lebensversicherer anstreben, die ungewisse Zukunft in kalkulierbare Bahnen zu lenken. Eine Sterbetafel muss auf sicheren Daten beruhen. Sie darf nicht gebraucht werden wie ein Betrunkener eine Straßenlaterne benutzt – mehr zur Unterstützung als zur Erleuchtung (in Anlehnung an Lothar Sachs: Statistische Methoden, 1970).

Nur für Spielbanken und Lotterien gilt, dass sie für die angebotene Leistung ein vorausbestimmbares Einkommen erzielen. Sie profitieren von der Tatsache, dass über den Ausgang eines Zufallsexperiments, das häufig wiederholt wird, eine fast sichere Vorhersage möglich ist.

Eine Bank mag sich darauf verlassen können, dass es ausreicht, einen gewissen Prozentanteil ihrer Gelder flüssig zu halten. Aufgrund ihrer bisherigen Erfahrungen wird sie annehmen können, dass nicht alle Kunden gleichzeitig ihre Gelder abziehen werden.

Ohne über den Begriff Risiko spintisieren zu wollen, lässt sich nicht abstreiten, dass Risiken im Allgemeinen schwer kalkulierbar sind und die Risikomodelle Schwächen zeigen. Das Vertrauen auf Risikomodelle kann sogar das Finanzsystem destabilisieren. Nach dem Zusammenbruch des Hedge fund LTCM im Jahr 1998 stellte sich die Frage: „Wie konnte der versammelte Sachverstand von Finanzmathematik und erfahrenen Händlern die Risiken so falsch einschätzen?" (F.A.Z. vom 30.09.1998).

Die wirtschaftliche Bedeutung der Versicherer braucht nicht eigens hervorgehoben zu werden. Die Lebensversicherungswirtschaft gilt insbesondere als Kapitalsammelbecken, da sie eine der wichtigsten Formen privater Altersversorgung mit entsprechenden Sparvorgängen darstellt. Die Kapitalmarktentwicklung in den vergangenen Jahren macht es allerdings den Versicherern nicht leicht, die versprochene Verzinsung zu erwirtschaften. Der künftige Wegfall des Steuerprivilegs wird die Lebensversicherer herausfordern.

Aktuelle Versicherungsbarwerte wünschenswert

Die steigende Lebenserwartung führt zu einer zeitlich länger anhaltenden Zahlungsverpflichtung. Deshalb müssten wegen der höheren Lebenserwartung neu zu vereinbarende Rentenzahlungen niedriger ausfallen. Die dazu erforderlichen Unterlagen stehen aber leider derzeit und auch nicht in absehbarer Zeit zur Verfügung. Für die Leibrentengeschäfte sind Versicherungsbarwerte nötig. Man gewinnt sie anhand der Absterbeordnung einer Sterbetafel, die der Größe „Überlebende im Alter x" entspricht. Die vom Statistischen Bundesamt publizierten sogenannten abgekürzten Sterbetafeln enden mit dem Lebensalter 90 Jahre und sind zudem nicht ausgeglichen; künftig ist allerdings eine Ausdehnung bis zum 100. Altersjahr vorgesehen.

Für Bayern liegt eine Sterbetafel für 1996/98 vor, die den gleichen Aufbau hat wie die Allgemeine Sterbetafel 1986/88 [1]. Damit war die Möglichkeit gegeben, relativ zeitnahe Kommutationszahlen zu berechnen, die sich allerdings nur auf Bayern beziehen. Hierbei kam es vor allem auf den zeitlichen Vergleich an. Derartige Ergebnisse wurden jetzt erstmals für Bayern zusammengestellt.

Kommutation bedeutet nach Duden: Veränderung, Vertauschung. Das lateinische Wort commutatio heißt Veränderung, Umschlag, Wechsel. Die Ergebnisse dieser behelfsmäßigen Berechnungen weist die Tabelle (S. 11/12) aus. Die Übersicht (S. 13) gibt die nötigsten Erläuterungen und ein Beispiel für die Anwendung. Es braucht nicht eigens erwähnt zu werden, dass die dort beschriebene Diskontierung in das Gebiet der Zinseszinsrechnung fällt im Unterschied zur kaufmännischen Diskontierung, die nur mit einfachen Zinsen rechnet. Die *Summa* von Pacioli aus dem Jahr 1494 beinhaltet übrigens bereits auch Abschnitte über die kaufmännische Arithmetik, darunter Zins- und Diskontrechnung.

Exkurs: Barwert

Dem Begriff Barwert begegnet man in verschiedenen Bereichen (zum Beispiel: kaufmännische Diskontierung, ewige Rente, Rentenrechnung, Sterbetafel und bei der Bewertung von Leibrenten).

Im Rahmen der Rentenrechnung versteht man unter Barwert folgendes: Der Barwert gibt an, durch welche Sofortleistung (Zeitwert, Ablösungswert) die gesamten, noch fälligen Zahlungen einer Rente abgelöst werden können.

Die Gewinnung der auf einer Sterbetafel basierenden Versicherungsbarwerte zeigt die Übersicht.

Die nachfolgend beschriebene Diskontierung wird zum Beispiel im Versicherungswesen gebraucht. Bestimmte Ausdrü-

Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte einer lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbaren Rente nach den bayerischen Sterbetafeln 1986/88 und 1996/98 – Zinssatz 3% –

1986/88									1996/98									
Männliche Personen					Weibliche Personen				Männliche Personen					Weibliche Personen				
x[1)]	l_x [2)]	D_x [3)]	N_x [4)]	$ä_x$ [5)]	l_x [2)]	D_x [3)]	N_x [4)]	$ä_x$ [5)]	x[1)]	l_x [2)]	D_x [3)]	N_x [4)]	$ä_x$ [5)]	l_x [2)]	D_x [3)]	N_x [4)]	$ä_x$ [5)]
0	100000	100000	2969429	29,69	100000	100000	3057228	30,57	0	100000	100000	3008146	30,08	100000	100000	3083159	30,83
1	99170	96282	2869429	29,80	99354	96460	2957228	30,66	1	99525	96626	2908146	30,10	99602	96701	2983159	30,85
2	99099	93410	2773147	29,69	99296	93596	2860768	30,57	2	99489	93778	2811520	29,98	99570	93854	2886458	30,75
3	99050	90645	2679737	29,56	99264	90841	2767172	30,46	3	99464	91024	2717742	29,86	99547	91100	2792604	30,65
4	99009	87968	2589092	29,43	99238	88172	2676331	30,35	4	99446	88356	2626718	29,73	99530	88431	2701504	30,55
5	98974	85376	2501124	29,30	99218	85586	2588159	30,24	5	99430	85769	2538362	29,60	99518	85845	2613073	30,44
6	98944	82864	2415748	29,15	99200	83078	2502573	30,12	6	99415	83259	2452592	29,46	99508	83336	2527228	30,33
7	98918	80429	2332884	29,01	99184	80646	2419495	30,00	7	99400	80821	2369334	29,32	99498	80901	2443892	30,21
8	98894	78068	2252455	28,85	99171	78287	2338849	29,88	8	99386	78456	2288513	29,17	99489	78538	2362991	30,09
9	98870	75776	2174387	28,70	99159	75997	2260562	29,75	9	99374	76162	2210056	29,02	99480	76243	2284453	29,96
10	98848	73552	2098611	28,53	99149	73776	2184565	29,61	10	99362	73935	2133894	28,86	99472	74017	2208210	29,83
11	98828	71395	2025059	28,36	99138	71619	2110789	29,47	11	99351	71773	2059960	28,70	99463	71854	2134194	29,70
12	98809	69303	1953664	28,19	99126	69525	2039170	29,33	12	99338	69674	1988186	28,54	99453	69754	2062339	29,57
13	98789	67271	1884361	28,01	99112	67490	1969645	29,18	13	99322	67633	1918513	28,37	99441	67714	1992585	29,43
14	98766	65296	1817091	27,83	99096	65514	1902154	29,03	14	99303	65651	1850879	28,19	99427	65733	1924871	29,28
15	98734	63374	1751795	27,64	99077	63594	1836640	28,88	15	99278	63723	1785228	28,02	99410	63808	1859138	29,14
16	98685	61497	1688421	27,46	99053	61727	1773046	28,72	16	99242	61844	1721506	27,84	99389	61936	1795330	28,99
17	98610	59661	1626924	27,27	99024	59911	1711320	28,56	17	99187	60010	1659661	27,66	99364	60117	1733394	28,83
18	98509	57864	1567263	27,09	98989	58146	1651409	28,40	18	99110	58217	1599652	27,48	99334	58348	1673277	28,68
19	98388	56109	1509399	26,90	98950	56430	1593263	28,23	19	99011	56465	1541435	27,30	99300	56629	1614929	28,52
20	98258	54403	1453290	26,71	98910	54764	1536833	28,06	20	98899	54758	1484970	27,12	99263	54960	1558300	28,35
21	98129	52749	1398887	26,52	98869	53147	1482069	27,89	21	98783	53101	1430212	26,93	99226	53339	1503340	28,18
22	98005	51148	1346138	26,32	98828	51578	1428922	27,70	22	98672	51496	1377112	26,74	99190	51767	1450001	28,01
23	97886	49598	1294990	26,11	98789	50056	1377345	27,52	23	98570	49945	1325615	26,54	99155	50241	1398235	27,83
24	97771	48097	1245392	25,89	98751	48579	1327289	27,32	24	98477	48444	1275671	26,33	99121	48761	1347994	27,64
25	97661	46643	1197295	25,67	98713	47146	1278710	27,12	25	98390	46992	1227227	26,12	99087	47325	1299233	27,45
26	97555	45236	1150651	25,44	98676	45756	1231564	26,92	26	98305	45584	1180235	25,89	99053	45930	1251908	27,26
27	97452	43872	1105416	25,20	98639	44406	1185809	26,70	27	98219	44217	1134651	25,66	99019	44577	1205978	27,05
28	97351	42550	1061544	24,95	98601	43096	1141403	26,48	28	98133	42892	1090434	25,42	98984	43264	1161401	26,84
29	97250	41268	1018994	24,69	98560	41824	1098306	26,26	29	98047	41606	1047543	25,18	98949	41989	1118137	26,63
30	97147	40023	977726	24,43	98516	40587	1056483	26,03	30	97960	40358	1005937	24,93	98914	40751	1076149	26,41
31	97039	38814	937703	24,16	98469	39386	1015895	25,79	31	97871	39147	965579	24,67	98878	39550	1035397	26,18
32	96924	37639	898889	23,88	98418	38219	976509	25,55	32	97779	37971	926431	24,40	98839	38383	995847	25,95
33	96802	36497	861250	23,60	98363	37085	938290	25,30	33	97685	36830	888460	24,12	98796	37249	957464	25,70
34	96675	35387	824753	23,31	98305	35984	901204	25,04	34	97585	35720	851630	23,84	98749	36147	920216	25,46
35	96542	34309	789365	23,01	98243	34914	865220	24,78	35	97476	34641	815910	23,55	98696	35075	884069	25,21
36	96399	33261	755056	22,70	98174	33873	830306	24,51	36	97356	33591	781269	23,26	98636	34033	848994	24,95
37	96246	32241	721795	22,39	98096	32860	796433	24,24	37	97226	32569	747678	22,96	98570	33019	814962	24,68
38	96079	31247	689554	22,07	98010	31875	763573	23,95	38	97083	31574	715109	22,65	98497	32034	781942	24,41
39	95895	30279	658307	21,74	97914	30917	731697	23,67	39	96928	30605	683535	22,33	98416	31075	749909	24,13
40	95694	29336	628028	21,41	97809	29984	700781	23,37	40	96756	29661	652929	22,01	98326	30143	718833	23,85
41	95476	28416	598692	21,07	97693	29076	670797	23,07	41	96565	28740	623268	21,69	98227	29235	688691	23,56
42	95240	27520	570276	20,72	97565	28192	641720	22,76	42	96353	27842	594528	21,35	98117	28352	659456	23,26
43	94983	26647	542755	20,37	97424	27332	613528	22,45	43	96119	26966	566686	21,02	97995	27492	631104	22,96
44	94702	25794	516108	20,01	97269	26493	586196	22,13	44	95862	26110	539720	20,67	97861	26655	603612	22,65
45	94392	24961	490314	19,64	97101	25677	559703	21,80	45	95583	25276	513610	20,32	97712	25839	576958	22,33
46	94052	24147	465353	19,27	96918	24882	534026	21,46	46	95280	24462	488334	19,96	97548	25044	551119	22,01
47	93680	23351	441207	18,89	96721	24109	509143	21,12	47	94951	23667	463872	19,60	97368	24270	526075	21,68
48	93272	22572	417856	18,51	96508	23355	485035	20,77	48	94596	22892	440205	19,23	97170	23515	501805	21,34
49	92824	21809	395285	18,12	96277	22620	461680	20,41	49	94209	22134	417313	18,85	96953	22779	478290	21,00

Noch: Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte einer lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbaren Rente nach den bayerischen Sterbetafeln 1986/88 und 1996/98 – Zinssatz 3% –

1986/88								
	Männliche Personen				Weibliche Personen			
x[1]	l_x[2]	D_x[3]	N_x[4]	$ä_x$[5]	l_x[2]	D_x[3]	N_x[4]	$ä_x$[5]
50	92331	21061	373476	17,73	96028	21905	439060	20,04
51	91786	20327	352414	17,34	95759	21207	417155	19,67
52	91186	19606	332087	16,94	95468	20527	395948	19,29
53	90526	18897	312481	16,54	95152	19863	375421	18,90
54	89802	18200	293583	16,13	94808	19215	355558	18,50
55	89010	17514	275383	15,72	94433	18581	336343	18,10
56	88145	16839	257869	15,31	94022	17962	317762	17,69
57	87204	16174	241030	14,90	93574	17355	299801	17,27
58	86183	15519	224856	14,49	93085	16762	282445	16,85
59	85079	14874	209337	14,07	92551	16180	265683	16,42
60	83890	14239	194463	13,66	91967	15610	249503	15,98
61	82612	13614	180224	13,24	91328	15050	233893	15,54
62	81242	12998	166611	12,82	90628	14500	218843	15,09
63	79775	12391	153613	12,40	89862	13958	204344	14,64
64	78203	11793	141222	11,97	89024	13425	190386	14,18
65	76519	11203	129428	11,55	88108	12900	176960	13,72
66	74715	10621	118225	11,13	87107	12382	164060	13,25
67	72785	10045	107604	10,71	86013	11871	151678	12,78
68	70722	9476	97559	10,30	84816	11364	139807	12,30
69	68520	8914	88083	9,88	83504	10863	128443	11,82
70	66173	8357	79170	9,47	82061	10364	117580	11,34
71	63676	7808	70812	9,07	80469	9867	107216	10,87
72	61025	7265	63004	8,67	78708	9370	97349	10,39
73	58220	6729	55739	8,28	76759	8872	87979	9,92
74	55264	6201	49010	7,90	74603	8371	79107	9,45
75	52165	5683	42809	7,53	72221	7868	70736	8,99
76	48936	5176	37126	7,17	69598	7362	62868	8,54
77	45594	4682	31950	6,82	66723	6852	55506	8,10
78	42161	4203	27268	6,49	63591	6340	48654	7,67
79	38665	3743	23064	6,16	60204	5828	42314	7,26
80	35139	3302	19322	5,85	56572	5316	36487	6,86
81	31620	2885	16019	5,55	52716	4810	31170	6,48
82	28149	2494	13134	5,27	48667	4311	26361	6,11
83	24768	2130	10641	5,00	44467	3824	22050	5,77
84	21519	1797	8511	4,74	40168	3354	18225	5,43
85	18443	1495	6714	4,49	35831	2905	14871	5,12
86	15575	1226	5219	4,26	31525	2481	11967	4,82
87	12946	989	3993	4,04	27322	2088	9486	4,54
88	10578	785	3004	3,83	23294	1728	7398	4,28
89	8486	611	2219	3,63	19509	1405	5670	4,03
90	6675	467	1608	3,44	16027	1121	4265	3,81
91	5140	349	1141	3,27	12896	876	3144	3,59
92	3870	255	792	3,11	10147	669	2268	3,39
93	2844	182	537	2,95	7796	499	1599	3,21
94	2037	127	355	2,80	5838	363	1101	3,03
95	1419	86	228	2,67	4255	257	738	2,87
96	960	56	143	2,54	3013	176	481	2,73
97	629	36	87	2,42	2069	118	305	2,59
98	399	22	51	2,31	1376	76	187	2,46
99	244	13	29	2,20	885	47	111	2,34
100	144	7	16	2,10	549	29	64	2,23

1996/98								
	Männliche Personen				Weibliche Personen			
x[1]	l_x[2]	D_x[3]	N_x[4]	$ä_x$[5]	l_x[2]	D_x[3]	N_x[4]	$ä_x$[5]
50	93786	21393	395178	18,47	96717	22062	455511	20,65
51	93322	20667	373785	18,09	96461	21363	433449	20,29
52	92813	19956	353118	17,69	96183	20681	412086	19,93
53	92257	19259	333162	17,30	95883	20016	391406	19,56
54	91652	18575	313903	16,90	95561	19367	371390	19,18
55	90995	17905	295328	16,49	95216	18735	352023	18,79
56	90283	17247	277423	16,09	94847	18119	333287	18,39
57	89510	16602	260176	15,67	94451	17518	315168	17,99
58	88671	15967	243574	15,25	94027	16931	297650	17,58
59	87759	15342	227607	14,84	93571	16359	280719	17,16
60	86766	14727	212265	14,41	93080	15799	264360	16,73
61	85683	14120	197538	13,99	92549	15251	248561	16,30
62	84501	13519	183418	13,57	91972	14715	233310	15,86
63	83214	12926	169899	13,14	91345	14189	218596	15,41
64	81815	12338	156973	12,72	90661	13672	204407	14,95
65	80300	11757	144635	12,30	89913	13164	190735	14,49
66	78664	11182	132878	11,88	89094	12665	177570	14,02
67	76906	10614	121696	11,47	88195	12172	164906	13,55
68	75023	10052	111082	11,05	87206	11685	152734	13,07
69	73013	9498	101030	10,64	86115	11202	141050	12,59
70	70875	8951	91532	10,23	84910	10724	129847	12,11
71	68606	8412	82581	9,82	83576	10248	119123	11,62
72	66202	7881	74168	9,41	82098	9774	108875	11,14
73	63660	7358	66287	9,01	80458	9299	99102	10,66
74	60977	6842	58929	8,61	78638	8824	89802	10,18
75	58153	6335	52087	8,22	76621	8347	80978	9,70
76	55190	5838	45751	7,84	74388	7868	72631	9,23
77	52093	5350	39914	7,46	71924	7386	64763	8,77
78	48869	4872	34564	7,09	69213	6901	57377	8,31
79	45532	4407	29692	6,74	66246	6412	50476	7,87
80	42100	3956	25285	6,39	63017	5922	44064	7,44
81	38597	3522	21328	6,06	59528	5431	38141	7,02
82	35053	3105	17807	5,73	55788	4942	32710	6,62
83	31504	2709	14702	5,43	51819	4457	27768	6,23
84	27990	2337	11992	5,13	47651	3979	23312	5,86
85	24556	1991	9655	4,85	43328	3512	19333	5,50
86	21248	1672	7664	4,58	38905	3062	15821	5,17
87	18110	1384	5992	4,33	34448	2632	12759	4,85
88	15184	1126	4608	4,09	30032	2228	10126	4,55
89	12506	901	3482	3,87	25736	1854	7898	4,26
90	10103	706	2581	3,65	21641	1513	6045	3,99
91	7994	543	1875	3,45	17822	1210	4531	3,75
92	6185	408	1332	3,27	14346	946	3321	3,51
93	4672	299	924	3,09	11263	721	2376	3,30
94	3439	214	625	2,93	8606	535	1655	3,10
95	2462	149	412	2,77	6385	385	1120	2,91
96	1710	100	263	2,63	4588	269	735	2,74
97	1150	65	163	2,49	3186	181	467	2,58
98	747	41	98	2,37	2131	118	285	2,43
99	468	25	56	2,25	1369	73	168	2,29
100	281	15	31	2,14	841	44	94	2,16

1 Vollendetes Alter x.
2 Überlebende im Alter x.
3 Diskontierte Zahl der Lebenden des Alters x.
4 Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden.
5 $ä_x = N_x / D_x$, Barwert der sofort beginnenden und lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente „1“ für eine x-jährige Person (lebenslängliche Leibrente).

Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte

Grundlage für die Berechnung von Versicherungsbarwerten ist die Spalte „Überlebende im Alter x“ (l_x) einer Sterbetafel. Mit diesen Daten werden für einen bestimmten Zinssatz (hier 3 %) sogenannte Kommutationszahlen (D_x und N_x) errechnet. Diese dienen zur Berechnung des Barwerts $ä_x = \frac{N_x}{D_x}$. Hier wurde nur der Barwert einer sofort beginnenden und lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente „1“ für eine x-jährige Person (lebenslängliche Leibrente) betrachtet. Man nennt D_x die diskontierte Zahl der Lebenden des Alters x. Es ist $D_x = l_x \cdot v^x$, $N_x = \Sigma\, D_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega$ und $v = \frac{1}{1+i}$ der Diskontierungsfaktor zum Zinssatz (Zinsfuß) $i = \frac{p}{100}$.
Mit x wird das vollendete Alter bezeichnet. Der Abzinsungsfaktor v^x berechnet sich aus $\frac{1}{(1+i)^x}$.
ω bedeutet das höchste in der Sterbetafel von den Überlebenden erreichbare Alter ($l_\omega > 0$, $l_{\omega+1} = 0$); für 1986/88 Männer 107 und Frauen 109 Jahre und für 1996/98 Männer 108 und Frauen 109 Jahre.

Ein Rechenbeispiel soll die Verwendung des Versicherungsbarwerts bei einem Kaufgeschäft auf der Basis einer Leibrente veranschaulichen: Eine 75-jährige Frau will ihr Haus für 250 000 Euro verkaufen. Dafür möchte sie eine lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbare Leibrente erhalten. Gefragt wird nach dem Betrag der Rente bei einer Verzinsung des Kaufpreises von 3 %. Der hier interessierende Barwert auf der Basis der Sterbetafel 1996/98 beträgt 9,70. Der Rentenbetrag oder Wert der Leibrente ist der Quotient aus Kaufpreis (250 000 Euro) und Barwert (9,70), also 25 773,20 Euro. Zum Vergleich der auf der Grundlage der bayerischen Sterbetafel 1986/88 berechnete Wert einer Leibrente: Diese beläuft sich auf 27 808,68 Euro (250 000 / 8,99).

Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte können auch für die Toten (Spalte d_x einer Sterbetafel) berechnet werden.

C_x stünde dann für die diskontierte Zahl der Toten und M_x für ΣC_x. Diese können für die Prämienberechnung aller Arten von Todesfallversicherungen herangezogen werden. Eine Kombination der Größen M_x und N_x ermöglicht die Festsetzung von Prämien für Lebensversicherungen.

cke gleichen den aus einer Sterbetafel abgeleiteten Versicherungsbarwerten. Die Zinseszinsformel setzt sich bekanntlich aus vier Größen zusammen, von denen jeweils drei gegeben sein müssen: $b_n = b_0 \cdot q^n$, Anfangswert b_0, Endbetrag b_n, Anzahl der Zinsabschnitte n, Zinssatz p, Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$.
Die Auflösung nach $b_0 = \frac{b_n}{q^n} = b_n \cdot \frac{1}{q^n}$ liefert den sogenannten Barwert (diskontierten Wert) einer Summe, das ist jener Betrag, den sie zur Zeit der Berechnung haben müsste, um samt Zinseszinsen nach n Jahren den Wert b_n zu erhalten. Statt $\frac{1}{q}$ schreibt man auch $v = \frac{1}{q}$ und nennt v den Diskontierungsfaktor oder Abzinsungsfaktor.
Damit wird $b_0 = b_n \cdot \frac{1}{q^n} = b_n \cdot v^n$. Die Größe v^n ist der Barwert eines in n Jahren fälligen Betrages von „1“.

Die kaufmännische Diskontierung rechnet dagegen nur mit einfachen Zinsen. Mit Barwert kann auch Ertragswert gemeint sein; das ist die Umrechnung (Diskontierung) laufender Erträge auf den gegenwärtigen Kapitalwert (Ertragswert).

Derzeit vereinbarte Leibrenten zu hoch

Es zeigte sich in der Tat, dass die anhand der bayerischen Sterbetafel 1996/98 berechneten Barwerte höher ausfallen als jene, die auf der Sterbetafel 1986/88 basieren. Dies bedeutet, dass neu abzuschließende Verträge niedrigere Leibrentenbeträge beinhalten müssten. Nur beim weiblichen Geschlecht fiel auf, dass ab dem Altersjahr 97 die Barwerte für 1996/98 geringfügig unter denen für 1986/88 liegen.

Veröffentlichung der probeweise ermittelten Barwerte

Nun stellte sich die Frage, ob die berechneten Versicherungsbarwerte veröffentlicht werden sollen. Selbst wenn die Daten nur von akademischem Wert sein sollten, so spricht doch einiges für ihre Publikation, ohne in einen Bereich einzutreten, der einstmals der Pythia (Priesterin des Orakels zu Delphi) oder der Sibylle (im Altertum Name für weissagende Frauen) vorbehalten war.

Da für Bayern relativ zeitnahe Sterbetafeln zur Verfügung stehen und mit den vorangegangen methodisch vergleichbar sind, wurde die Gelegenheit genutzt, aktuelle Versicherungsbarwerte zu gewinnen. Bayern weist als flächenmäßig größtes Land der Bundesrepublik rund 12 Millionen Einwohner aus.

Die Tabelle weist die berechneten Barwerte für 1996/98 und zum Vergleich die für 1986/88 aus, wobei den Daten jeweils ein Zinssatz von 3 % zugrunde gelegt wurde. Cui bono?

Für die Lebensversicherer besteht wegen der Längerlebigkeit der Bevölkerung und der Kapitalmarktentwicklung (sinkende Zinsen) ein Handlungsbedarf.

Es ist noch nicht lange her, dass das Bundesfinanzministerium der Versicherungswirtschaft anheim stellte, „... neue Produkte auf Basis der Leibrenten auf den Markt zu bringen“ (siehe SZ vom 21. Oktober 2003: *Das Ende der „hässlichen Braut“*). Was bedeutet diese Anregung? Der berühmte Mathematiker Leonhard Euler (1707 - 1783) brachte schon zum Ausdruck, dass die notwendigen Rechnungsgrundlagen für Leibrenten die Sterbetafel und der Zinsfuß sind. Euler betrachtete Personen, die sich eine Leibrente verschaffen als besonders lebenskräftig. Auch heute dürfte die Lebenserwartung der Personen, die Rentenversicherungen abschließen, im Durchschnitt höher sein als die der Gesamtbevölkerung.

An dieser Stelle sei auch daran erinnert, dass Anlage 9 zu § 14 Bewertungsgesetz den Kapitalwert einer lebenslangen Nutzung oder Leistung für die Altersjahre 0 bis 110 für beide Geschlechter ausweist; berechnet nach der Sterbetafel für die Bundesrepublik Deutschland 1986/88.

Erstaunen mag der Zusatz „Gebietsstand seit dem 3. Oktober 1990“ (sic!).

Verfahren der Barwertberechnung nach Tetens

Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte wurden schon vor mehr als 200 Jahren berechnet, und zwar genau in der Form wie heute. In Deutschland leistete auf diesem Gebiet Johann Nicolaus Tetens (1736 - 1807) Pionierarbeit [3]. Er veröffentlichte 1785 und 1786 ein zweibändiges Werk mit dem Titel *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen*. Seinen Berechnungen legte er die Absterbeordnung nach Süßmilch (verbessert von Baumann) zugrunde (siehe Abbildung 1).

Von unveränderlichen Leibrenten. 89

A. Alter.	B. Lebende nach Süßmilch.	C. Die Zahlen in B. discontirt auf die Jahre des Alters, für r = 1,04.	D. Summen der Zahlen in B. von hinten an addirt.	E. Summen der Zahlen in C. von hinten an addirt.
0	1000	1000	28988	12431, 48
1	750	721, 15	27988	11431, 48
2	661	611, 13	27238	10710, 33
3	618	549, 40	26577	10099, 20
4	593	560, 90	25959	9549, 80
5	579	475, 90	25366	9042, 90
6	567	448, 11	24787	8567, 00
7	556	422, 51	24220	8118, 89
8	547	399, 69	23664	7696, 38
9	539	378, 69	23117	7296, 69
10	532	359, 40	22578	6918, 00
11	527	342, 33	22046	6558, 60
12	523	326, 66	21519	6216, 27
13	519	311, 70	20996	5889, 61
14	515	297, 40	20477	5577, 91
15	511	283, 74	19962	5280, 51
16	507	270, 69	19451	4996, 77
17	503	258, 23	18944	4726, 08
18	499	246, 32	18441	4467, 85
19	495	234, 95	17942	4221, 53
20	491	224, 09	17447	3986, 58
21	486	213, 27	16956	3762, 49
22	481	202, 96	16470	3549, 22
23	476	193, 13	15989	3346, 26
24	471	183, 75	15513	3153, 13
25	466	174, 80	15042	2969, 38
26	461	166, 28	14576	2794, 58
27	456	158, 15	14115	2628, 30
28	451	150, 40	13659	2470, 15
29	445	142, 69	13208	2319, 75
30	439	135, 35	12763	2177, 06

F 5 A.

Abb. 1 Ausschnitt aus: Tetens, Johann Nicolaus: Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen. Bd. 1. Leipzig 1785. [Der Spalte C liegt ein Zinssatz von 4 % zugrunde.]

Die Spalte B der Tabelle von Tetens entspricht der „Anzahl der Überlebenden“ (Absterbeordnung) l_x einer Sterbetafel oder Überlebendentafel (engl. Life table). In dem Werk von Tetens heißt es im Capitel II Abschnitt 1 unter Punkt 56: „Praktische Methode, die mittlere Lebensdauer und die Leibrenten nach jeder gegebenen Sterblichkeitstafel zu berechnen.“ Diese Aussage hat heute noch Gültigkeit. Die Spalten C und E der Tetens-Tabelle werden in einer heutigen Kommutationstafel mit den Symbolen D_x und N_x gekennzeichnet (siehe Übersicht S. 11).

Zur Berechnung des Barwerts führt Tetens unter Punkt 58 folgendes aus: „Um den Wehrt der Leibrente 1 zu haben, nämlich auf ganze Jahre, wobey die Zwischenzeiten nicht gerechnet werden, und auch die Rente jedesmal am Ende des Jahrs zahlbar ist, wie im 8ten Satz § 40. dividire man die Zahl aus der Columne E, welche bey dem um 1 Jahr größern Alter steht, durch die Zahl aus der Columne C, bey dem gegebenen Alter selbst." „Ex. Es sey das gegebene Alter 20 Jahr, so stehet in der Columne E bey 21 Jahr die Zahl 3762,49; und in der Columne C bey 20 Jahr, 224,09. Es ist 3762,49 / 224,09 = 16,79. Dies ist der baare Wehrt der Leibrente 1, für eine Person von 20 Jahren, wenn die Zinsen des Geldes zu 4 Procent gerechnet werden."

Hier handelt es sich um eine nachschüssige (postnumerando) Leibrente, da sie am Ende eines Jahres zu zahlen ist. Dagegen nennt man eine im voraus zu leistende Zahlung vorschüssig (praenumerando). Der Barwert einer jährlich vor- bzw. nachschüssig zahlbaren Leibrente lässt sich auch wie folgt einfach berechnen:

vorschüssig:	Spalte E / Spalte C
nachschüssig:	Spalte E / Spalte C - 1

Übrigens findet man eine Diskontierung bereits in dem 1585 veröffentlichten Buch *L' Arithmetiqve* von Simon Stevin [5].

Mit Hilfe der Spalte D der Tabelle von Tetens lässt sich auch die mittlere künftige Lebenserwartung berechnen. Tetens wählte die Bezeichnung mittlere Lebensdauer. Unter Punkt 57 erläuterte er diese: „Ex. Das gegebene Alter sey 15 Jahr, so ist A [B] = 511. Die bey dem 16ten Jahr stehende Zahl unter D, ist 19451. Nun ist 19451 / 511 + ½ = 38,06 + 0,5 = 38,56. Dies ist die mittlere Lebensdauer."

Tetens nennt zu Beginn seiner Vorrede Halley und Moivre. Dann zitiert er folgende zwei Schriften von Simpson: *Doctrine of Annuities and Reversions* (1742) und *Select Exercises for the young Proficients in the Mathematicks* (London 1752). Anschließend führt Tetens aus: „Von den neuern brittischen Schriftstellern in dieser Materie sind mir nur Morgan und Price als solche bekannt geworden, die etwas vorzügliches und etwas eigenes geleistet haben. In der allgemeinen Theorie bleiben beyde bey Simpson stehen. Morgan hat eine doppelte Berechnungsart der Renten gewiesen, die allerdings vielen Werth hat. Doch scheint Herr Doct. Price, der sie mit Recht sehr empfiehlt, ihr etwas zu viel Vorzüglichkeit zuzuschreiben. Ich habe sie nicht so leicht und kurz gefunden, dass ich nicht Gründe gehabt, noch auf eine andre zu denken, und diese jener vorzuziehen. Man mag selbst vergleichen und urtheilen."

Tetens Urteil zum Stand in Deutschland lautet: „Im Jahr 1752 als Simpsons oben erwähnte *Select Exercises* herauskamen, schien man in Deutschland noch nicht einmal die Elemente dieser Rechnungen zu kennen. Wittwen- Waysen- und Todten-Cassen hatten wir. Aber welche? Alle auf Gerathewohl, oder nach einem ohngefähren, just in diesen Materien am öftersten trüglichen Ueberschlag entworfen, ..."

Von den zahlreichen Büchern, die Tetens verfasste, sei in diesem Zusammenhang noch das folgende angeführt: *Nachricht von dem Zustande der allgemeinen Wittwen-Casse zu Copenhagen am Schluß des Jahres 1797.*

Die Persönlichkeit Tetens

Nach Brockhaus war Tetens ein deutscher Philosoph und Psychologe, der ab 1776 als Professor der Philosophie in Kiel lehrte, seit 1789 lebte er in Kopenhagen. Er beeinflusste den Kritizismus von Immanuel Kant (1724 - 1804). In Meyers Konversationslexikon ist u.a. zu lesen, dass Tetens 1789 als Finanz- und Versicherungsbeamter in Kopenhagen tätig war. Die *Encyclopædia Britannica* bezeichnet Tetens als „German psychologist, mathematician, economist, educator, and empiricist philosopher" (Psychologe, Mathematiker, Wirtschaftswissenschaftler, Lehrer und Philosoph).

Erste Diskontierung von Simon Stevin

Mit der Diskontierung hatte sich schon zweihundert Jahre früher Simon Stevin (um 1548 - 1620) befasst. Abbildung 2 zeigt einen Ausschnitt aus einer Tabelle seines Werks *La Pratique d´Arithmetique*. In: *L' Arithmetique* von 1585 [5]. Ausgehend von einem Betrag von 10 Millionen berechnete Stevin für eine Reihe von Zinssätzen diskontierte (abgezinste) Werte für jeweils 30 Jahre. Der für fünf Jahre diskontierte Betrag von 8 219 271 bei einem Zinssatz von 4 % errechnet sich (in heutiger Schreibweise) wie folgt:

$\frac{10^7}{1{,}04^5}$ = 8 219 271. Der Diskontierungsfaktor $\frac{1}{q^n}$ unterscheidet sich nicht von jenem, den Tetens gebraucht. Während Stevin jeweils den Betrag von 10 Millionen heranzieht, setzt Tetens dafür die Anzahl der Überlebenden einer Sterbetafel ein. Welchen Verlauf hätte die Entwicklung der Leibrentenbewertung genommen, wenn es zur Zeit Stevins schon eine Sterbetafel gegeben hätte? Man mag darüber spekulieren.

Stevin, ein Verfechter der Dezimalbruchrechnung, veröffentlichte im Jahr 1585 das Buch *De Thiende* (Dezimalbruchrech-

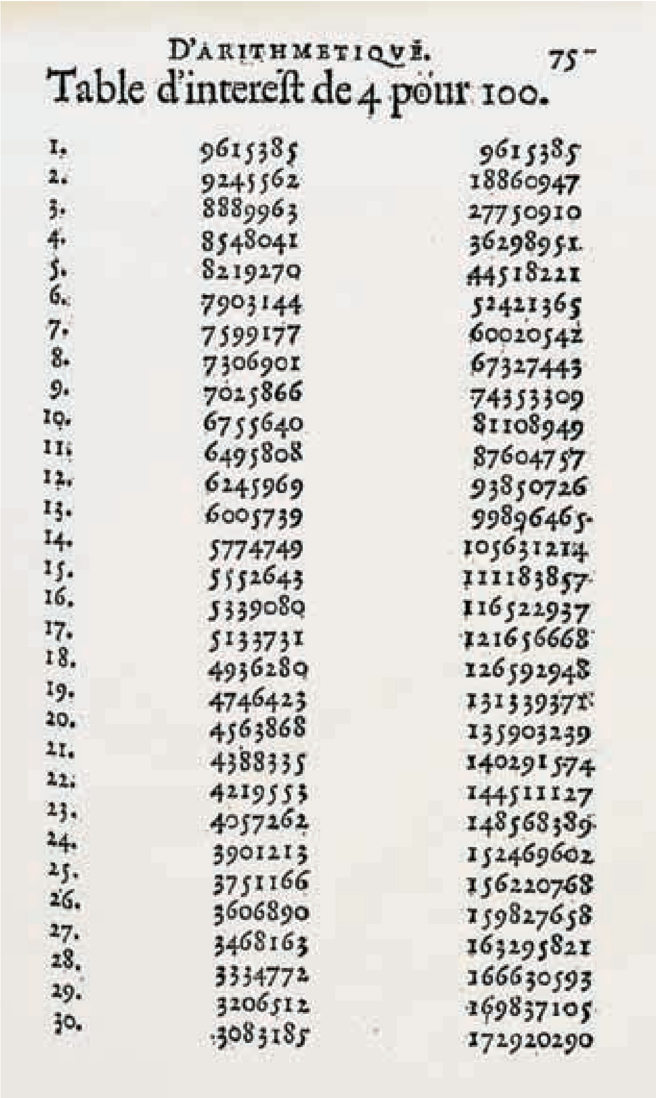

D'ARITHMETIQVE. 75

Table d'intereſt de 4 pour 100.

1.	9615385	9615385
2.	9245562	18860947
3.	8889963	27750910
4.	8548041	36298951
5.	8219270	44518221
6.	7903144	52421365
7.	7599177	60020542
8.	7306901	67327443
9.	7025866	74353309
10.	6755640	81108949
11.	6495808	87604757
12.	6245969	93850726
13.	6005739	99896465
14.	5774749	105631214
15.	5552643	111183857
16.	5339080	116522937
17.	5133731	121656668
18.	4936280	126592948
19.	4746423	131339371
20.	4563868	135903239
21.	4388335	140291574
22.	4219553	144511127
23.	4057262	148568389
24.	3901213	152469602
25.	3751166	156220768
26.	3606890	159827658
27.	3468163	163295821
28.	3334772	166630593
29.	3206512	169837105
30.	3083185	172920290

Abb. 2 Auszug aus: Stevin, Simon: La Pratique d´Arithmetique. In: L' Arithmetique. Leyden 1585.

nung). Außerdem forderte er die Einführung dezimal unterteilter Münz-, Maß- und Gewichtssysteme. Während andere negative Zahlen ablehnten, hatte Stevin diese anerkannt. Er setzte sich auch für die indisch-arabische Zahlenschreibweise von Brüchen ein. Den für den Schiffbau wichtigen Begriff des Metazentrums führte Stevin ein. Er war ein Anhänger der kopernikanischen Lehre.

Sterbetafeln als Entscheidungsgrundlage

Für Amartya Sen (geb. 1933), „Nobelpreisträger"[4] für Wirtschaftswissenschaften 1998, erweisen sich Sterblichkeitsdaten als wichtige Ergänzung der ökonomischen Analyse (siehe seinen Beitrag *Lebensstandard und Lebenserwartung* in der Schrift „Spektrum der Wissenschaft", November 1993). Im Vorspann zu dem genannten Beitrag heißt es: „Herkömmliche Kriterien wie Bruttoinlandsprodukt und Zahlungsbilanz sagen oft zu wenig über die tatsächliche Leistungsfähigkeit einer Volkswirtschaft aus. Als wichtige Ergänzung der ökonomischen Analyse erweisen sich Sterblichkeitsdaten."

Die Bedeutung von Sterbetafeln unterstrich schon der große Mathematiker und Astronom Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), der auch einmal ersucht wurde, die „Universitätswittwencasse" zu begutachten. In seiner Schrift *Gauß zum Gedächtnis* führt W. Sartorius von Waltershausen zu diesem Thema folgendes aus: „Besonderen Werth legte er auf Mortalitätstafeln und auf die Erforschung der Gesetze, nach denen sich das menschliche Leben abspinnt, theils vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus, theils in Rücksicht auf eine weitere Anwendung bei der Berechnung von Lebensassecuranzen, Tontinen, Wittwencassen u.s.w." Gauß interessierte sich besonders für die beiden äußersten Grenzen des menschlichen Lebens.

„est senatori necessarium nosse rem publicam – idque late patet: …" (dass ein Senator mit Staat und Politik vertraut sein muss – und das ist ein weites Feld: …) schrieb der römische Staatsmann und berühmte Redner Marcus Tullius Cicero (106 - 43 v. Chr.) in seiner Schrift *De Legibus* III 41 (Über die Gesetze).

Kurfürst Max IV. Josef von Pfalz-Bayern (reg. 1799 - 1806), der spätere bayerische König Maximilian I. Joseph (reg. 1806 - 1825), ließ bald nach seinem Regierungsantritt den Auftrag erteilen (1799), Vorschläge zur Begründung einer Witwen- und Waisen-Versorgungsanstalt auszuarbeiten. Ein solches Projekt lässt sich nur mit einer Sterbetafel bewerkstelligen. Damit war der Anstoß für die Erstellung einer ersten bayerischen Mortalitäts-Tafel (Sterbetafel) gegeben. Dieses Vorhaben fiel aber in eine schwierige Zeit (verarmter Staat und die Schicksalsfrage: mit Habsburg oder Frankreich?). Es dauerte daher ein Vierteljahrhundert bis dieses Projekt vollendet war (um 1826), das außerhalb der amtlichen Statistik abgewickelt wurde [6].

Nebenbei sei bemerkt, dass ein erster Vorläufer der amtlichen Statistik in der 1801* geschaffenen Einrichtung „Statistisch-topographisches Bureau" gesehen werden kann [7].

* Forschungsstand 2008: Siehe 200 Jahre amtliche Statistik in Bayern, S.62

4 Dieser Preis wird nicht von Alfred Nobels Stiftung getragen, sondern von der schwedischen Reichsbank.

Nach Meyers Konversations-Lexikon 1897: „Die erste Organisation der amtlichen Statistik erfolgte 1756 in Schweden, wo eine „Tabellenkommission“ jährlich Nachweisungen über die Bewegung der Bevölkerung lieferte. Ferner wurden eigne mit der Ansammlung, Ordnung und Veröffentlichung des statistischen Materials betraute Stellen (statistische Bureaus) errichtet in Frankreich (1796 vorübergehend, dann 1800), Bayern (1801, Hermann, Mayr), Italien (1803, Bodio), Preußen (1805 von Stein gegründet [Frh. v.u.z. Stein], Krug, J.G. Hoffmann, Dieterici, Engel, Blenck), Österreich (1810, Czörnig, Ficker), ...“

Mittlere Lebenserwartung: Überlebenswahrscheinlichkeit

Heute ist die Kenntnis der mittleren künftigen Lebenserwartung in jedem Alter und die ihr nahestehende wahrscheinliche Lebensdauer von besonderem Interesse. Mit gehaltvoller Kürze beschreiben beide Begriffe eine Reihe von Tatsachen. Eine Definition dieser Ausdrücke findet sich im bereits genannten Beitrag *Bayerische Sterbetafel 1996/98* [1] auf den Seiten 296 und 297.

Für einen neugeborenen Knaben beträgt die Wahrscheinlichkeit, das durch die mittlere Lebenserwartung angegebene Alter von 74,7 Jahren zu erreichen, rund 60 %. Mit zunehmendem Alter nimmt die Überlebenswahrscheinlichkeit ständig ab, wenn auch nur allmählich. Die Aussicht eines 66 Jahre alten Mannes, das Alter von 80,8 Jahren (bei einer mittleren Lebenserwartung von 14,8 Jahren) zu erlangen, beläuft sich noch auf über 50 %. Eine 73-jährige Frau kann noch mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % damit rechnen, weitere 12,7 Jahre zu leben. Dann sinkt die Überlebenswahrscheinlichkeit unter 50 %. Das heißt: Die Wahrscheinlichkeit, das Alter, das aufgrund der mittleren Lebenserwartung zu erreichen in Aussicht gestellt wird, zu erleben ist danach bereits geringer als die Wahrscheinlichkeit, vorher zu sterben.

Vorläufer von Altersabsicherungen

Mit dem Thema Alter und den damit verbunden Fragen mussten sich die Menschen schon immer auseinandersetzen. In einem in der F.A.Z. vom 6. Juli 1996 veröffentlichten Aufsatz *Das Reich auf feste Füße stellen* verwies der Autor Hans-Peter Schneider auf die zahlreichen Denkschriften von Leibniz (1646 - 1716) zur Verbesserung der Krankheits- und Altersvorsorge, zur Errichtung von Renten- und Pensionskassen und zur Schaffung von Systemen der Lebensversicherung. Der Verfasser folgert: „So wird man in Leibniz nicht zuletzt auch einen Vorläufer moderner Sozialstaatlichkeit erblicken können.“

„Zwei wichtige sozialpolitische Probleme sind heute die Verschuldung der Staaten und die gerechte Berechnung der Renten. Dies sind genau die Probleme, die Leibniz ausführlich zwischen 1680 und 1683 diskutiert.“ So heißt es treffend bei Eberhard Knobloch in seinem Beitrag *Die Schriften im Überblick* für das von ihm u.a. im Jahr 2000 herausgegebene Werk *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik* von Gottfried Wilhelm Leibniz [8].

Erste Anfänge von Unterstützungskassen (Hinterbliebenenversorgung)

Zur Zeit des römischen Kaisers Augustus wurde eine Veteranenversorgung (aerarium militare) eingerichtet. Auch bestand in jeder Legion eine Begräbniskasse (Marquardt, S. 563) [9].

Als eine der ältesten konfessionsungebundenen sozialen Einrichtungen der Welt gilt heute die 1545 in Bremen gegründete Stiftung „Haus Seefahrt“. Sie unterstützt seither neben Witwen und Waisen von bremischen Seeleuten auch jene, die selbst in Seenot, Gefangenschaft oder sonstige widrige Umstände geraten sind. Als Deutschlands älteste Sozialsiedlung gilt die von Jakob Fugger 1521 ins Leben gerufene Stiftung. Sogenannte Waisen- und Witwenkassen wurden erst im 18. Jahrhundert errichtet.

Demographische Entwicklung war absehbar

Allmählich scheint das Problem der demographischen Entwicklung der Öffentlichkeit bewusst zu werden, wie die seit einiger Zeit öffentlich ausgetragenen Diskussionen zeigen. Bestimmte Institutionen standen dieser Entwicklung jedoch schon lange aufgeschlossen gegenüber. Einige ausgewählte sollen hier genannt werden:

Das ifo-Institut München veranstaltete zum Beispiel schon 1978 eine Tagung „Wechselwirkungen zwischen Wirtschafts- und Bevölkerungsentwicklung“.

Die erste UN-Konferenz über das Altern fand vor mehr als zwanzig Jahren (1982) statt.

Im Jahr 1983 gab Günter Schmölders ein Buch mit dem Titel *Der Wohlfahrtsstaat am Ende* heraus. Scharfzüngig lautet es darin: „Adam Riese schlägt zurück.“

In einem gesellschaftspolitischen Beitrag der Deutschen Bank aus dem Jahr 1983 mit dem Titel *Der Staat – das sind wir selbst* hieß es: „Die politische Legitimation, die jedes demokratische Herrschafts- und Sozialsystem braucht, um Regieren zu ermöglichen, war leicht erreichbar, solange der Konsens der Bürger sich unkritisch bloß auf mehr Wohlstand und mehr öffentliche Leistung bezog.“

In jüngerer Zeit fehlt es nicht an mahnenden Worten in Bezug auf den demographischen Wandel. So wurde zum Beispiel in der F.A.Z. vom 23. März 2004 ein Aufsatz von Paul S. Hewitt mit der Überschrift *Die Geopolitik des globalen Alterungsprozesses* veröffentlicht. Unter anderem heißt es dort: „Der globale Alterungsprozess wird unsere Welt grundlegend verändern. Keine Region, kein Individuum wird den weitreichenden Auswirkungen auf Wirtschaft, Finanzsysteme, Regierungsbudgets und sogar Militärapparate entgehen.“

Manche meinen, dass die heutige Gesellschaft erst beginnt, sich auf die Längerlebigkeit der modernen Menschen einzustellen.

Lebenserwartung und Versicherungstarife

Im vergangenen Jahr entbrannte in den USA eine Diskussion über die versicherungsmathematische Ungleichbehandlung von „Handwerklichen Arbeitern“ (Blue-collar) und „Bürobeschäftigten“ (White-collar). Die Wirtschaftspresse berichtete im Mai 2003, dass amerikanische Industriekonzerne möglicherweise mehrere Milliarden Dollar an Pensionsverpflichtungen aus ihrer Bilanz entfernen können. Eine empirische Studie der Society of Actuaries (Gesellschaft amerikanischer Versicherungsstatistiker) ergab, dass die Arbeiter eine geringere Lebenserwartung aufweisen als Bürokräfte.

Demgegenüber will die EU einheitliche Versicherungstarife für Männer und Frauen durchsetzen (SZ vom 31. Juli 2003). Der erste, der auf die Längerlebigkeit der Frauen aufmerksam machte, war Johann August Kritter. Er begann nach eigenen Angaben 1768 über Witwencassen zu schreiben; siehe „Bayern in Zahlen“ 5/2002 S. 207 und 208 [6]. Die von Kritter verfasste Schrift *Oeconomisch-politische Auflösung der wichtigsten Fragen, welche itzo wegen der Einrichtung dauerhafter Witwencassen aufgeworfen werden* hat Herr Euler für gründlich abgefasst erkannt, schrieb seinerzeit A.G. Kästner (s. S. 144).

Handelt es sich bei der Längerlebigkeit der Frauen auch um einen charakteristischen Tatbestand wie bei der Geschlechterproportion? Die Bevölkerungsstatistik zeigt, dass das zahlenmäßige Verhältnis der geborenen Knaben und Mädchen von erwähnenswerter Konstanz ist. Bekanntlich kommen auf 100 geborene Mädchen ungefähr 106 Knaben. Den unterschiedlichen Anteil der beiden Geschlechter an den Geburten beobachtete schon John Graunt (1620 - 1674), der – wie Süßmilch (1707 - 1767) berichtete – erkannte, dass sich die Töchter zu den Söhnen verhalten wie 1000 zu 1068. Graunt verfügte über Aufzeichnungen der in London von 1629 bis 1661 Geborenen.

Schlussbemerkung

Begriffe wie Rente, Zins und Lebenserwartung werfen Fragen nach der historischen Entwicklung der Sterblichkeitsmessung auf. Dabei spielten die Fortschritte der Rechentechnik eine maßgebliche Rolle. Die Anwendung von Mathematik und Statistik war richtungsweisend für die Lebens- und Rentenversicherung. Ein Abriß zu diesen Themen ist für später geplant. Mit dem Phänomen Zeit befassten sich die Menschen schon immer und damit wohl auch mit Fragen zur menschlichen Lebenszeit. In Platons (427 - 347 v. Chr.) Dialog *Timaios* (Die Weltschöpfung) wurde schon die Lebensspanne des Menschen erörtert: Die Wahl fiel auf die kürzere, doch edlere Lebenszeit anstelle einer längeren, doch unbedeutender hingebrachten Lebensdauer.

Literaturnachweis

[1] Hirtz, Helmut: Bayerische Sterbetafel 1996/98. In: Bayern in Zahlen. Zeitschrift des Bayerischen Landesamts für Statistik und Datenverarbeitung. 132. (55.) Jahrgang. Heft 8/2001. S. 289 ff.

[2] Schweizerische Volkssterbetafeln 1931/41 und 1939/44. Statistische Quellenwerke der Schweiz. Heft 232, Reihe Bk 4. Bern 1951.

[3] Tetens, Johann Nicolaus: Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen. Bd. 1. Leipzig 1785.

[4] Cicero, Marcus Tullius: De officiis. Lateinisch/deutsch = Vom pflichtgemäßen Handeln. Übersetzt, kommentiert und herausgegeben von Heinz Gunermann. Stuttgart 1976.

[5] Stevin, Simon: La Pratique d´Arithmetique. In: L' Arithmetique. Leyden 1585.

[6] Hirtz, Helmut: Bayerische Sterbetafeln - ein methodisch-historischer Streifzug. In: Bayern in Zahlen. Zeitschrift des Bayerischen Landesamts für Statistik und Datenverarbeitung. 133. (56.) Jahrgang. Heft 5/2002, S. 193 ff.

[7] Lorenz, Hildegard: Die Pioniere der bayerischen Statistik und ihre Erben. Unveröff. Manuskript. Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung.

[8] Knobloch, Eberhard: Die Schriften im Überblick. In: Gottfried Wilhelm Leibniz: Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik. Berlin 2000.

[9] Marquardt, Joachim: Römische Staatsverwaltung. Bd. 2. Darmstadt 1957.

Zur geschichtlichen Entwicklung von Sterbetafeln und Leibrenten

Für Bayern wurden im Dezemberheft 2004 von „Bayern in Zahlen“ erstmals Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte für 1996/98 und zum Vergleich für 1986/88 nachgewiesen. Gelegenheit gab hierfür die „Bayerische Sterbetafel 1996/98“, die den gleichen Aufbau hat wie die „Allgemeine bayerische Sterbetafel 1986/88“ (siehe „Bayern in Zahlen“ 8/2001). Anstelle von Volkszählungsergebnissen wurden die Daten aus der Bevölkerungsfortschreibung herangezogen. Bayern[1] hat als einziges Land im Bund eine mit der Sterbetafel von 1987 (letzte Volkszählung) vergleichbare Sterbe- oder Überlebendentafel berechnet. Sterbetafeln sind eine wichtige Basis zur Bewertung von Leibrenten. Neben der Zinseszins- und Rentenrechnung ist die Sterbetafel eine wichtige Grundlage der Versicherungsmathematik. Eine Lebensversicherungsgesellschaft muss wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Versicherungsfall in einem bestimmten Zeitraum eintritt.

Historische Momente auf dem Weg zur Sterbetafel …

Die für das Jahrzehnt 1891/1900 berechnete „Allgemeine bayerische Sterbetafel“, ist die älteste Tafel, die für Vergleiche herangezogen werden kann.
Die Statistik hat den eigenartigen Weg genommen, dass ihre ersten wirklich literarischen Leistungen der 1660 gegründeten Londoner Royal Society als naturwissenschaftliche Schriften vorgelegt und von ihr aufgenommen worden sind. Daran erinnerte Hellmuth Wolff in seinem Aufsatz *Vom ‚Gesetz' in der Statistik* (AStA Bd. 21, 1931) und er begründet dies damit, weil es um den „Menschen“ und im besonderen um seine Geburt und seinen Tod ging.

Die ersten Berechnungen der mittleren und/oder wahrscheinlichen Lebensdauer im 17. Jahrhundert beruhten auf praktischen Überlegungen. Den Anlass dazu gaben die aufkommenden Leibrenten- und Tontinenanstalten, Witwen- und Waisenkassen und später die Lebensversicherungen.

Trotz der Berühmtheit von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) waren bis zum Erscheinen der *Hauptschriften zur Versicherungs und Finanzmathematik* von Leibniz im Jahr 2000 seine versicherungswirtschaftlichen und finanzwissenschaftlichen Schriften kaum bekannt.

Neue Wege der Sterblichkeitsmessung beschritt der berühmte Astronom Edmond Halley, der die Auswertung der Breslauer Sterberegister durch den Geistlichen und Gelehrten Caspar Neumann (1648 - 1715) benutzte.

Der große Mathematiker und Astronom Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), dessen Todestag sich heuer am 23. Februar zum 150. Mal jährte, führte auf Wunsch des Senats der Universität Göttingen eine Untersuchung des Zustandes der 1739 gegründeten Professorenwitwenkasse zu Göttingen durch. „… durch welche nemlich eine auf Mortalitätsgesetze und die Wahrscheinlichkeitsrechnung basirte Bilanz zwischen dem Vermögen der Anstalt und ihren Obliegenheiten gezogen werden soll, will ich mich nicht entziehen, …“ schreibt Gauß, vgl. Gauß, Carl Friedrich: Nachlass. In: Werke. Band IV. 2. Abdr. Hrsg. von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1880.

Benno Hubensteiner berichtet in seiner *Bayerischen Geschichte*: „ ..., aber der alte oder kranke Dienstbote erhielt keinen Kreuzer Unterstützung, und noch im Jahr 1781 war der Bauer in keiner Weise verpflichtet, den arbeitsunfähigen Knecht auch nur für ein paar Wochen in Haus und Pflege zu behalten.“

Überraschen mag vielleicht der folgende Satz von Werner Heisenberg (1901 - 1976): „…, dass wir Physiker hier Statistik treiben müssen, so wie etwa eine Lebensversicherungsgesell-

1 Bayern weist als flächenmäßig größtes Land der Bundesrepublik rund 12 Millionen Einwohner aus und seine Geschichte reicht weit zurück. Bayern ist das einzige Land innerhalb der Bundesrepublik, das sich als altes Stammesherzogtum seit dem sechsten Jahrhundert (um 550) als Staat erhalten hat. Mit der Übergabe des Herzogschwerts an Pfalzgraf Otto von Wittelsbach durch Kaiser Friedrich Barbarossa im Jahr 1180 begann die mehr als 700jährige Herrschaft der Wittelsbacher. 1253 war Bayern das größte Territorialherzogtum im Deutschen Reich.

schaft über die Lebenserwartung ihrer vielen Versicherten statistische Rechnungen anstellen muss.“ vgl. 9. Gespräche über das Verhältnis zwischen Biologie, Physik und Chemie (1930 - 1932). In: Der Teil und das Ganze – Gespräche im Umkreis der Atomphysik. München 2003.

… und zur Leibrente

Begriffe wie Leibrente, Lebenserwartung und Zinssatz werfen Fragen nach der historischen Entwicklung der Sterblichkeitsmessung und der Bewertung von Leibrenten auf.

Erste Ansätze für die Bewertung von Leibrenten unter Berücksichtigung der Sterblichkeit und des Zinssatzes finden sich bei Jan de Witt (1625 - 1672). Im Jahr 1671 erschien seine Abhandlung *Waerdye van Lyf-Renten* (s. S. 143). De Witt war in der statthalterlosen Zeit seit 1650 als Ratspensionär Hollands der Leiter der gesamten niederländischen Politik. Die Niederlande waren damals die führende Handels- und Seemacht Europas und auch das Zentrum des geistigen und wissenschaftlichen Lebens.

Die Historie der Leibrente stand unter dem Einfluss verschiedener Entwicklungen und sie lässt sich nicht mit ein paar Pinselstrichen darstellen. In einem Streifzug sollen die vielfältigen Wechselbeziehungen mit dem zeitgeschichtlichen Umfeld aufgezeigt werden.

Man muss die Geschichte kennen, wenn man die Gegenwart verstehen will. „Historia magistra vitae“ (Die Geschichte ist die Lehrmeisterin des Lebens). So haben Renaissance, Humanismus, Reformation, Entdeckungsfahrten und Erfindungen die Welt seit dem 15. Jahrhundert tiefgreifend verändert. Die Renaissance empfand man als Wiedergeburt der Antike. Mit dem Ende des oströmischen Reichs 1453 flohen viele griechische Gelehrte aus Konstantinopel, die durch ihre Kenntnisse der antiken Welt die Renaissance stützten und vertieften.

Die Erfindung des Buchdrucks durch Johann Gutenberg um 1448 förderte maßgeblich die Entwicklung des geistigen Lebens.

Einen Aufschwung erlebte die Mathematik in Europa im 15./16. Jahrhundert. Zur Zeit von Galilei orientierte sich die vorherrschende Lehrmeinung in erster Linie an Aristoteles sowie am Weltbild des Claudius Ptolemäus (2. Jahrhundert n. Chr.).

Die Fortschritte bei der Bewertung der Leibrenten wurden maßgeblich durch die Weiterentwicklung der Rechentechnik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung geprägt, wobei auch Impulse von den Innovationen im Finanzwesen ausgegangen sein mögen.

Bemerkenswert ist, dass Simon Stevin (1548 - 1620) bereits 1585 diskontierte Werte eines bestimmten Betrages berechnete und Johann Nicolaus Tetens (1736 - 1807) 1785 die Idee hatte, die „Diskontierte Zahl der Lebenden des Alters x“ (heutige Schreibform) einzuführen. Beide führten den gleichen Rechengang aus. Der Unterschied besteht darin, dass Stevin einen Betrag von zehn Millionen wählte und Tetens in seine Berechnungen die Anzahl der Überlebenden nach der Absterbeordnung von Süßmilch einfließen ließ. Die hier angesprochene Diskontierung, bei der die Zinseszinsrechnung eine Rolle spielt, wird zum Beispiel im Versicherungswesen gebraucht. Die kaufmännische Diskontierung rechnet nur mit einfachen Zinsen.

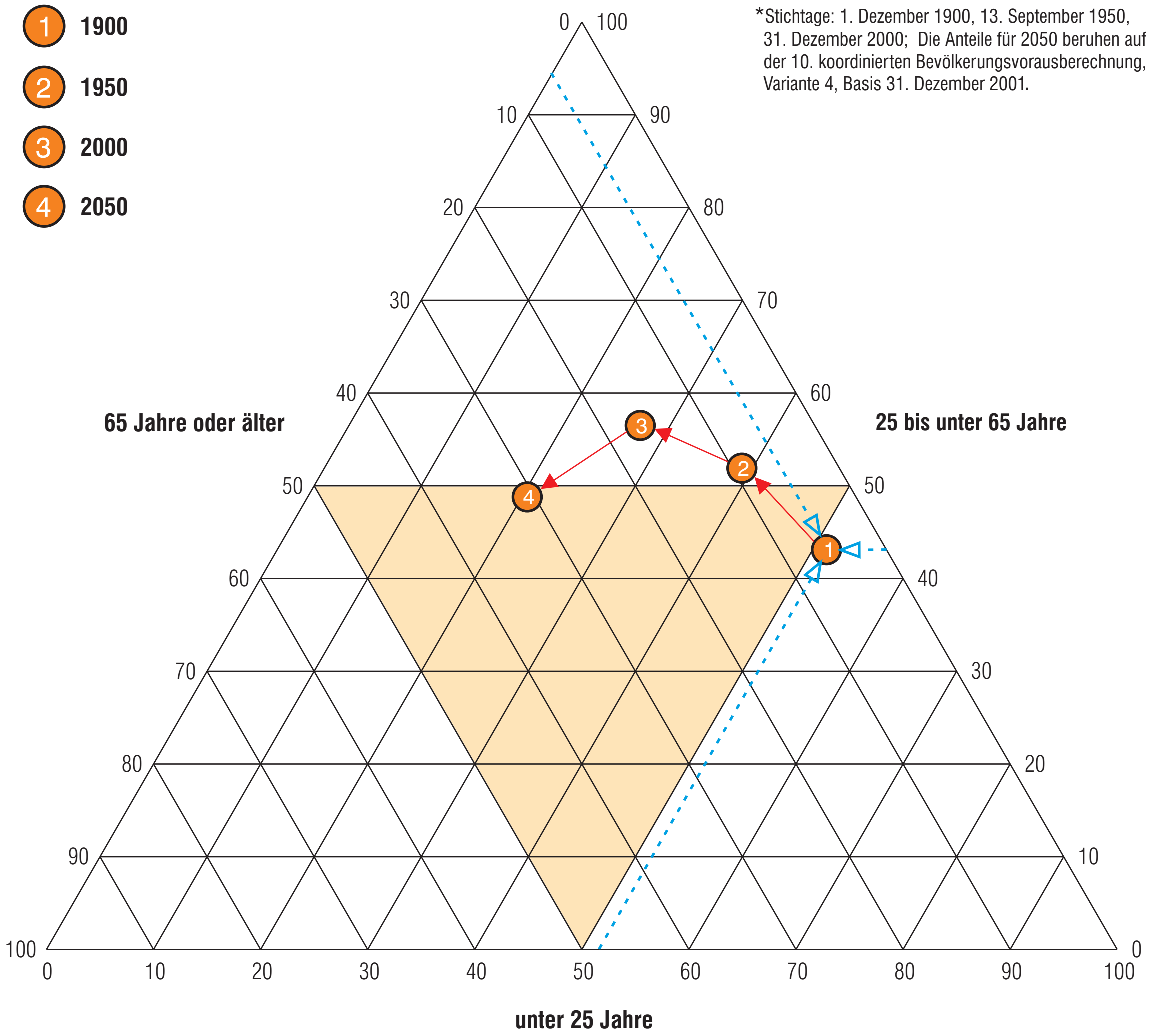
Nachfolgend werden einige Begriffe näher beleuchtet, die sich wie ein roter Faden durch diese Beiträge ziehen.

Sterbetafel: Grundlage für Bevölkerungsprognosen

Mit Hilfe einer Sterbetafel kann man abschätzen wie viele der heute lebenden Menschen in ein paar Jahrzehnten noch am Leben sein werden. Es lässt sich auch sagen, wie viele Personen zum Beispiel in etwa 25 Jahren das heiratsfähige Alter erreichen werden. Angaben zu Geburtenzahlen in den nächsten Jahren sind dagegen nur mit einer eingeschränkten Wahrscheinlichkeit möglich. Noch weitaus schwieriger sind Aussagen zum zukünftigen Wanderungssaldo.

Damit wird aber nicht gesagt, dass Bevölkerungsprognosen keinen Sinn haben. Auch wenn es anders kommt, so bedarf es doch sog. Modellrechnungen, vor allem wenn sie kurzfristig angelegt sind. Wirtschaftsprognosen sind noch skeptischer zu beurteilen, weil man davon ausgehen muss, dass sie sich nicht (genau) vorausberechnen lassen. Gewöhnlich bezeichnet man die Bevölkerungsvorausberechnungen zu Recht als Modellrechnungen. Ein eigenes Kapitel sind die Konjunkturprognosen, über die jüngst folgendes geschrieben wurde: „Die Prognosen der Wirtschaftsforschungsinstitute sind ungefähr so zuverlässig wie die Orakel von Sterndeutern und Kaffeesatzlesern.“, siehe den Beitrag *Entlaßt die Experten. Warum fallen die Konjunkturprognosen immer falsch aus?* in der F.A.Z. vom 19. April 2005. Von Ernst Wagemann stammt übrigens der Satz: „Jede Prognose kocht eben mit Wasser, dass heißt, sie transponiert die Erfahrungen der Vergangenheit, wie sie in ihrer Zeit angefallen sind, in die Zukunft.“

Prozentuale Verteilung der bayerischen Bevölkerung nach Altersgruppen in den Jahren 1900, 1950, 2000 und 2050*



*Stichtage: 1. Dezember 1900, 13. September 1950, 31. Dezember 2000; Die Anteile für 2050 beruhen auf der 10. koordinierten Bevölkerungsvorausberechnung, Variante 4, Basis 31. Dezember 2001.

Die Anwendung von Dreieckskoordinaten macht sich die Eigenschaft gleichseitiger Dreiecke zunutze, dass die Summe der Abstände von einem Punkt der Dreiecksfläche zu den drei Dreiecksseiten konstant ist. Eine Darstellung in Dreieckskoordinaten bietet sich bei jeder prozentualen Aufgliederung einer statistischen Masse an, die aus drei Teilmassen besteht. In der Abbildung ist am Beispiel des Jahres 1900 durch Richtungspfeile kenntlich gemacht, von welcher Skala jeweils die zugehörigen Anteile abgetragen sind. Hierbei ist der jedem Jahr zugeordnete Punkt stets durch zwei Koordinaten festgelegt, so dass sich die jeweils dritte Koordinate zwangsläufig ergibt.

Alle Punkte, die in nächster Umgebung des Inkreismittelpunkts gelegen sind, der als einziger gleiche Koordinaten aufweist, beziehen sich demnach auf eine statistische Masse mit weitgehend gleichmäßiger Besetzung der drei Gruppen.

„Lebenserwartung" – Schlüsselbegriff unserer Zeit

Immer wieder ist zu hören, dass eine eigene Vorsorge für das Alter vonnöten ist. Will man sich mit dem notwendigen Kapitalbedarf im Ruhestand auseinandersetzen, so sieht man sich einer Gleichung mit mindestens vier Unbekannten gegenüber: Persönliche Lebenserwartung, jährlicher Bedarf an finanziellen Mitteln in der Zeit des Ruhestands, Rendite des Eigenkapitals und die Inflationsrate. Die Idee der Leibrentenversicherung (Rentenzahlung von einer bestimmten Altersgrenze an bis zum Lebensende) war schon vor Jahrzehnten ein möglicher Bestandteil einer Vorsorge für das Alter.

Neuerdings kann man eine Unterteilung des letzten Lebensabschnitts beobachten, und zwar in die Zeit von der Erwerbsaufgabe bis zum 85. Lebensjahr und in die ab dem 85. Altersjahr. Für die letzte Phase wird eine zusätzliche finanzielle Absicherung in Form einer lebenslangen Rente ab dem 85. Lebensjahr empfohlen. In der freien Vorsorge werden neben Kapitalversicherungen Leibrenten als Alternative angeboten.

Demographische Entwicklung von 1900 bis 2050

Seit Ende des 19. Jahrhunderts wurde in den europäischen, später auch in außereuropäischen Ländern das Absinken der Geburtenzahlen (Geburtenrückgang) beobachtet.

Nach Presseberichten kümmern sich die Deutschen zu wenig um die private Altersversorgung. Dies erstaunt, weil bereits vor vier Jahrzehnten (nach der Rentenreform 1957) empfohlen wurde, dass der einzelne neben oder statt einer Sozialrente auch eigene Vorkehrungen für eine befriedigende Altersversorgung treffen muss.

Die Verteilung der bayerischen Bevölkerung nach drei bestimmten Altersgruppen spricht im langfristigen Vergleich für sich. Die zugehörigen Ergebnisse wurden der besseren Übersicht in Dreieckskoordinaten umgesetzt (siehe Abbildung). In diesem Schaubild kommt die ganze Dramatik der demographischen Entwicklung auf prägnante Weise zum Ausdruck.

Zum Begriff der „Rente" …

Unter dem Begriff Rente versteht man gewöhnlich ein Einkommen, das auf Besitz, Versicherungs- oder Versorgungsansprüchen beruht. Un homme bien renté – wer mit Rentenpapieren und Rentenansprüchen, Staatsrente, Grundrente, Leibrente oder anderem arbeitslosen Einkommen gut ausgestattet ist. Mit dem Aufbau der Sozialversicherungen bekam die Rente den Charakter einer Unterhaltsverpflichtung.

… und der „Leibrente"

Unter „Leibrente" wird eine Rente verstanden, bei der die Anzahl der Zahlungsleistungen dadurch begrenzt ist, dass die Zahlungen beim Eintritt eines bestimmten Ereignisses (meist Tod des Rentenempfängers) eingestellt werden.

Von der rechtlichen Seite her steht der Begriff Leibrente im Zusammenhang mit verschiedenen Rechtsgebieten, zum Beispiel mit dem Zivilrecht und dem Familienrecht.

Lebenserwartung und Leibrente – eine Alliteration? In bestimmten Fällen können Kaufgeschäfte auf Leibrentenbasis Bestandteil einer Vorsorge für das Alter sein. Ein Immobiliengeschäft auf Rentenbasis kann für den Käufer und Verkäufer gleichermaßen attraktiv sein – eine erstrangige Absicherung (Eintragung im Grundbuch) vorausgesetzt. Die möglichen Auswirkungen der demographischen Entwicklung auf die Immobilienmärkte sollen hier außer Betracht bleiben. Zum Unterschied zwischen Wert und Preis einer Immobilie: Der Wert wird geschätzt, der Preis bezahlt.

Leibrenten im Wandel der Zeit

Die Leibrente unterlag im Lauf der Zeit einem umfassenden Wandel. Aus dem mittelalterlichen Leibrentengeschäft entwickelte sich die Lebensversicherung. Historisches zur Leibrente sowie die mit der Leibrente verwandten Gebiete wie Montes und Tontinen werden im Passus *Bemerkenswertes zu Geldgeschäften und die Anfänge des Versicherungswesens* dargestellt. Das Verfahren zur Berechnung der Versicherungsbarwerte von Johann Nicolaus Tetens aus dem Jahr 1785 wurde im Heft 12/2004 von „Bayern in Zahlen" geschildert.[2]

2 Ende 2004 gab das Statistische Bundesamt bekannt, dass es Versicherungsbarwerte auf Basis der Sterbetafel 2001/2003 zur Verfügung stellt, siehe *Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte für Leibrenten 2001/2003*. Dies ist ein Novum – bisher wurden diese Berechnungen jeweils auf der Basis einer Allgemeinen Sterbetafel durchgeführt.

Leibrente im Wandel der Zeit - ein komplexes Phänomen

Das Thema Alter und die damit verbundenen Fragen haben die Menschen schon immer beschäftigt und so braucht es nicht zu verwundern, dass sich ein Interesse für die Historie der Sterbetafeln regte. Wegen fehlender Zensusdaten und einer verstärkten Nachfrage nach einer aktuellen Sterbetafel wurde im Jahr 2001 erstmals eine bayerische Sterbetafel (Überlebendentafel) aufgrund der Ergebnisse der Bevölkerungsfortschreibung erstellt und veröffentlicht. Sie bezog sich auf den Zeitraum 1996/98 (s. *Bayerische Sterbetafel* in „Bayern in Zahlen" 8/2001). Die registrierte höhere Lebenserwartung gegenüber der vorangegangen Sterbetafel (1986/88) zog die Frage nach neu berechneten Versicherungsbarwerten nach sich und so entstand im Dezember 2004 ein Beitrag zum Thema Leibrenten (s. *Leibrente – ein einfacher Begriff mit komplexem Hintergrund*). Dies war letztlich der Anlass für den Aufsatz im Juli-Heft 2005 der Zeitschrift „Bayern in Zahlen": *Zur geschichtlichen Entwicklung von Sterbetafeln und Leibrenten*. Die nachfolgenden Ausführungen mögen verdeutlichen, welch mannigfache Gründe zu diesem „Addidamentum" (Zugabe) führten.

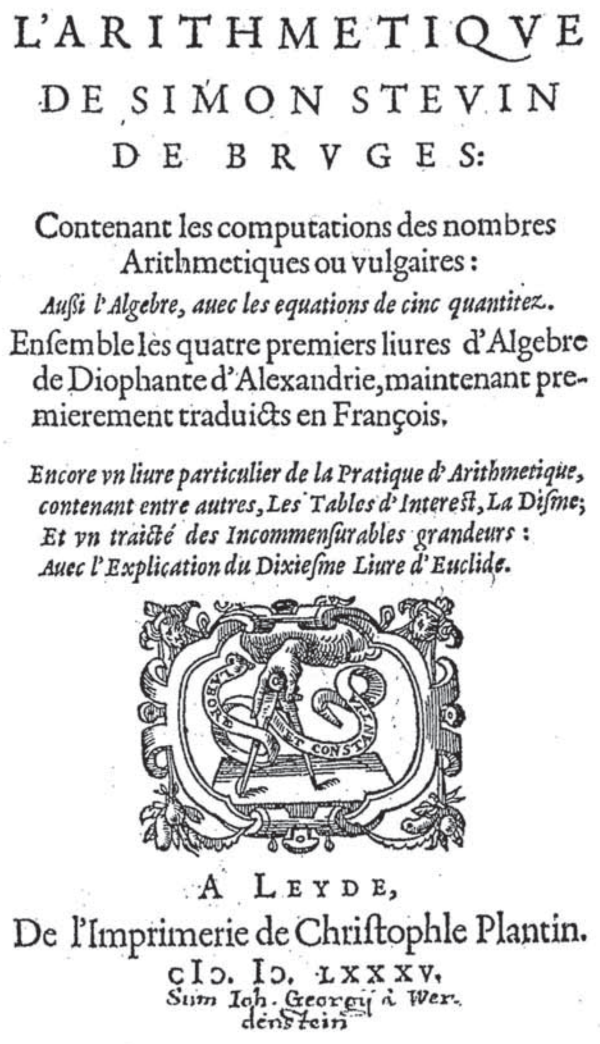
Schon die Römer ...

– die für pragmatische Lösungen bekannt sind – entwickelten ein Modell für die Dauer von Leistungen in Abhängigkeit vom Alter. Das ist die Regel des römischen Juristen Domitius Ulpianus (um 170 - 228), der als *Praefectus praetorio* maßgeblichen Einfluss auf die Leitung des römischen Staates hatte.

Eine so genannte Absterbeordnung (Überlebendentafel) veröffentlichte 1693 der berühmte Astronom Edmond Halley, der sich auch mit Leibrenten befasste.

Die heute noch übliche Berechnung der Versicherungsbarwerte für Leibrenten geht auf Nikolaus Tetens (1736 - 1807) zurück. Er publizierte in Deutschland 1785 zum ersten Mal solche Rechenergebnisse, um Leibrenten angemessen bewerten zu können. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass schon zweihundert Jahre früher diskontierte Zahlen von Simon Stevin veröffentlicht wurden (s. S. 26), die auf einem Betrag von 10 Millionen basierten. Das Werk von Stevin verdient auch deshalb Beachtung, weil erst rund hundert Jahre später Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) den Satz prägte: „Für höhere Potenzen werden wir Logarithmen zur Anwendung bringen, …" Den Berechnungen von Stevin und Tetens liegt (in heutiger Schreibweise) jeweils der Diskontierungsfaktor $\frac{1}{q^n}$ zugrunde.
Erinnert sei an die beeindruckenden Arbeiten von Charles Babbages (1792 - 1871) auf dem Gebiet der Rechenmaschinen, die er unter anderem auch für das Rechnen mit Potenzen einsetzen wollte. Sein Vorhaben konnte allerdings erst 120 Jahre nach seinem Tod in die Realität umgesetzt werden. So rechnete 1991 eine nach den Originalzeichnungen gebaute „Difference Engine No. 2" x^7 für alle x von 1 bis 100 fehlerfrei aus.

Zwischen Stevin und Tetens begegnet man Gottfried Wilhelm Leibniz. Ihn hatte nicht nur die Frage nach der menschlichen Lebenserwartung beschäftigt, sondern auch die Diskontierung und die Berechnung des Barwertes, für die er eine kurze Formel schuf. Er verfasste auch zahlreiche Denkschriften zur Verbesserung der Krankheits- und Altersvorsorge. Treffend schrieb Eberhard Knobloch im Jahr 2000: „Zwei wichtige sozialpolitische Probleme sind heute die Verschuldung der Staaten und die gerechte Berechnung der Renten. Dies sind genau die Probleme, die Leibniz ausführlich zwischen 1680 und 1683 diskutiert." vgl. *Die Schriften im Überblick* in dem von Knobloch u.a. im Jahr 2000 herausgegebenen Werk *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik* von Leibniz.



L'ARITHMETIQVE
DE SIMON STEVIN
DE BRVGES:

Contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires:

Aussi l'Algebre, auec les equations de cinc quantitez.

Ensemble les quatre premiers liures d'Algebre de Diophante d'Alexandrie, maintenant premierement traduicts en François.

Encore vn liure particulier de la Pratique d'Arithmetique, contenant entre autres, Les Tables d'Interest, La Disme; Et vn traicté des Incommensurables grandeurs: Auec l'Explication du Dixiesme Liure d'Euclide.

A LEYDE,
De l'Imprimerie de Christophle Plantin.
CIↃ. IↃ. LXXXV.

Sum Ioh. Georgij à Werdenstein

Aus: Stevin, Simon: L'Arithmetique. Leyden 1585.

Von Leonhard Euler (1707 - 1783) ...

dessen Geburtstag sich heuer zum dreihundertsten Mal jährt, stammt der Satz: „Der größte Nutzen, welchen die Logarithmen gewähren, zeigt sich bei der Auflösung solcher Gleichungen, wo die unbekannte Größe ein Exponent ist.“ Die Bezeichnung e für die natürlichen Logarithmen geht auf Euler zurück. Ebenso die besondere Relation, die fünf Basisgrößen der Mathematik (π, e, i, 0 und 1) miteinander verbindet. Erinnert sei an eine Schrift von Euler aus dem Jahr 1770: *Nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Witwencaße*. Es kommt nicht von ungefähr, dass die Mathematik in jeder Versicherung eine hohen Stellenwert innehat.

Die bemerkenswerte Zahl e findet sich übrigens auch im Gompertz'schen Gesetz, weil der Verlauf der Sterblichkeit im hohen Alter näherungsweise diesem Gesetz entspricht.

Jakob Bernoulli (1655 - 1705) ...

wandte Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht nur auf Glücksspiele, sondern auch auf Todesfälle an. Dabei gelangte er zu der Erkenntnis, dass Sterbewahrscheinlichkeiten nicht a priori berechnet, sondern nur aus Erfahrung geschätzt werden können und dazu benötigt man Sterbetafeln.

Eine längere Lebensdauer erfordert ...

ein bestimmtes Finanzpolster. Einer Studie zufolge sollen die Deutschen erhebliche Wissenslücken haben, wenn es um Themen wie private Vorsorge oder Geldanlage geht. Leider gibt es aber für eine passende Altersversorgung kein Patentrezept. Ein Abstecher in die Sphären der Finanzwelt mag von Interesse sein. Die Unberechenbarkeit der Finanzmärkte soll nur kurz gestreift werden. Die historische Entwicklung der Rechenkünste und der Einsatz der Rechenknechte können nicht außen vor bleiben. Natürlich ist auch dem Zins, der schon immer im Leben der Menschen eine wichtige Rolle gespielt hat, Rechnung zu tragen.

Außer Betracht bleibt die Geschichte des gesetzlichen Rentensystems. Soviel sei hier erwähnt: Nach einer Analyse der Rentenreform 1957 fehlte es nicht an Hinweisen, dass der einzelne neben oder statt einer Sozialrente auch noch eigene Vorkehrungen treffen muss, um eine wirklich befriedigende Altersversorgung zu erzielen.

Im nachfolgenden Beitrag geht es zunächst um die zentrale Fragestellung der Altersversorgungs- und Leibrentenproblematik, nämlich „Wie lange lebt der Mensch“ – durchschnittlich gesehen. Der Beitrag versucht, querbeet Wissenswertes und weniger Bekanntes zur menschlichen Lebensdauer in Form von Zitaten und Fundstücken darzustellen, insbesondere aus historischer Sicht.

Menschliche Lebensspanne – ein Potpourri

Die F.A.Z. versah in ihrer Ausgabe vom 18. August 2005 einen Artikel mit der Überschrift *Die Deutschen leben länger als gedacht: Lebenserwartung um rund zehn Jahre unterschätzt/Details der Riester-Rente wenig bekannt*. Diesem Beitrag war außerdem zu entnehmen, dass auch die Experten der Deutschen Aktuarsvereinigung lange Zeit die Langlebigkeit der Deutschen zu gering angesetzt haben. Der Abschluss eines Geschäfts auf Leibrentenbasis mag manchem als eine Wette vorkommen. Gewiss kommt dabei die Spekulation mit ins Spiel, da man nicht weiß wie lange die Zahlungsverpflichtung besteht. Bei Geschäftsabschlüssen auf Leibrentenbasis spielt die fernere mittlere Lebensdauer eine wichtige Rolle. Es gibt gewisse Zahlen, die in gehaltvoller Kürze eine Reihe von Tatsachen beschreiben. Zu diesen zählen die mittlere Lebenserwartung und die ihr nahe stehende wahrscheinliche Lebensdauer. Diese Größen lassen sich mit Hilfe einer Sterbetafel gewinnen.

Exkursion in die Geschichte

Fragen zur Lebenserwartung reichen weit in die Vergangenheit zurück. Ansätze, das Problem menschlicher Sterblichkeit mit mathematischen Mitteln anzugehen, finden sich bereits im 17. Jahrhundert. Durch das Aufkommen von Leibrenten- und Tontinenanstalten, Witwen- und Waisenkassen stellte sich die Frage nach der mittleren und wahrscheinlichen Lebensdauer eines Menschen. So erstellte der berühmte Astronom Edmond Halley 1693 aus den von Caspar Neumann gesammelten Daten eine Überlebendentafel, die er auch auf Leibrenten angewandt hatte. Dies war aber erst der Anfang einer langen Entwicklung. Die älteste bayerische Überlebendentafel, die für Vergleiche herangezogen werden kann, ist die für das Jahrzehnt 1891/1900 berechnete „Allgemeine bayerische Sterbetafel“. Die erste bayerische Mortalitäts-Tafel wurde ca. 1826 veröffentlicht (siehe „Bayern in Zahlen“ 5/2002). Nicht erfüllt hat sich die von Theodor Wittstein in seinem Buch *Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit* (Hannover 1883) zum Ausdruck gebrachte Vision „gleichwie der Astronom jetzt aus wenigen Beobachtungen eines Gestirnes dessen ganze Bahn berechnet, so auch dereinst aus der Beobachtung weniger Altersklassen mit Sicherheit eine ganze Sterblichkeitstafel aufbauen zu können.“ (zitiert nach Emanuel Czuber). Bislang wurden Sterbetafeln aufgrund von Volkszählungsergebnissen angefertigt; die letzte Volkszählung fand 1987 statt. Vorbei sind jene Zeiten, als der König sich höchstpersönlich die Ergebnisse seines statistischen Dienstes ansah. Gemeint ist hier Friedrich der Große. Als der „Philosoph von Sanssouci“ die „Seelentabelle“ von 1769 mit der von 1756 verglich, erschien ihm die Bevölkerungszunahme falsch registriert. Daraufhin befahl er, dass in Zukunft die Landräte den statistischen Dienst persönlich zu besorgen hätten (Ernst Wagemann: *Die Zahl als Detektiv*). Schon in der Antike gab es im Ansatz die heute vertretene Ansicht, dass man aus Beobachtungen sehr wohl induktiv zu neuen Erkenntnissen gelangen kann. Lange bevor Edmond Halley (1656 - 1742) erstmals im Jahr 1693 eine Sterbetafel konstruierte, machte man sich darüber Gedanken, wie die Lebensabschnitte abzugrenzen sind bzw. gewisse Abläufe durch Altersjahre markiert werden können. Beeindruckend ist das von Domitius Ulpian (um 170 - 228) stammende Modell über die Dauer von Leistungen gegliedert nach Altersjahren. Mit der Zeitspanne von der Geburt bis zum Tod hat sich der Mensch mit seinem Bewusstsein der Zeit schon immer auseinandergesetzt. Dem Thema Lebensalter widmeten sich nicht nur philosophische Schriftsteller, die Jurisprudenz oder Mathematiker. Auch in der Kunst spielte die Lebensspanne des Menschen schon sehr früh eine Rolle. Goethes Worte „Geprägte Form, die lebend sich entwickelt“ umfasst das Menschenleben in seiner Gesamtheit (*Urworte. Orphisch*, V. 8). „Eine ganz besondere Stelle in den Klagen über das Erdenleben nimmt das Alter ein.“ Dieser Satz findet sich in der Schrift *Zur Gesamtbilanz des griechischen Lebens* von Jacob Burckhardt (Herausgegeben von Otto Seel. Stuttgart 1948, S. 54). Der berühmte Physiker Werner Heisenberg (1901 - 1976) betonte in *Gespräche über das Verhältnis zwischen Biologie, Physik und Chemie (1930 - 1932)* (In: Der Teil und das Ganze, S. 126) die Kenntnis der Lebenserwartung im Bezug auf Lebensversicherungsgesellschaften.

Zeitlos sind die dem Lebensalter in der Antike gewidmeten Schriften

Die römischen Schriftsteller Cicero (106 - 43 v. Chr.) und Seneca (um 4 v. Chr. - 65 n. Chr.) widmeten dem Alter eigene Schriften.

Marcus Tullius Cicero setzte sich in dem Werk *Cato maior de senectute* (Cato der Ältere über das Alter) mit den Freuden und Leiden des Alters auseinander. Cicero lässt darin das Gespräch über das Alter den 84jährigen Cato mit Scipio Africanus und Gaius Laelius führen. Dieser Dialog, den Cicero im Alter von 62 Jahren verfasste, zählt zu seinen besten Werken. In seinen philosophischen Schriften vermittelt Cicero griechisches Geistesgut. Plato (427 - 347 v. Chr.), Schüler des Sokrates (470 - 399), war Ciceros philosophisches Vorbild. Cicero gehörte zu den bekanntesten Persönlichkeiten der römischen Geistesgeschichte. Durch seine Tätigkeit als Anwalt, Politiker und Schriftsteller trat er wie kaum ein anderer an die Öffentlichkeit.

In der Schrift *De brevitate vitae* (Von der Kürze des Lebens) des philosophischen Schriftstellers und Dichters Lucius Annaeus Seneca soll vermittelt werden, dass das Leben nicht kurz ist, sondern die Zeit nicht richtig gebraucht wird.

Sowohl Cicero als auch Seneca gaben in ihren Abhandlungen zu bedenken, dass der Tod alle – ob jung oder alt – erfassen kann. Cicero legte in seinem oben genannten Werk *Cato* folgende Worte in den Mund: „Wer ist indessen so töricht, mag er auch noch so jung sein, dass er es für eine ausgemachte Sache hält, er werde bis zum Abend leben?“, vgl. *Cato* 67 (übersetzt und hrsg. von Harald Merklin. Stuttgart 1998).

Phänomen Lebenszeit (Tod)

Dass wir alle zum Tode verurteilt sind, lässt sich der *Genesis* (2,15 - 17) entnehmen: „denn sobald du davon issest, musst du sterben.“

Der Tod als biologisches Gesetz ließ schon die Alten sagen: „Der Tod ist gewiss, seine Stunde ungewiss“ (Mors certa, hora incerta).

Die Auseinandersetzung des Menschen mit dem Tod ist ohne den Blick auf das Danach nicht denkbar. Im alten Ägypten galt in besonderer Weise die Aufmerksamkeit dem Schicksal nach dem Tod. Die heutigen Verhältnisse formulierte treffend Carl Friedrich von Weizsäcker: „Wahrscheinlich ist keine Menschheit je dem Tode gegenüber so ratlos gewesen wie die heutige.“

„Mors quid est? aut finis aut transitus“ (Der Tod – was ist er? Entweder Ende oder Übergang), so heißt es bei L. Annaeus Seneca (um 4 v.Chr. - 65 n. Chr.), vgl. *epistulae morales ad Lucilium* 65,24 (Briefe an Lucilius über Ethik). Mit transitus ist der Übergang in ein besseres Leben gemeint. Cicero drückt sich so aus: „… wir wollen vielmehr glauben, dass uns ein Hafen und Zufluchtsort bereitet ist.“ (*Tusc. Disp*. I,118). Die Unterscheidung von Leib und Seele reicht weit zurück. Im *Phaidon* versucht Platon (427 - 347 v. Chr.) die Unsterblichkeit der Seele zu begründen.

Mit dem Phänomen Zeit befassten sich die Menschen schon immer und damit waren wohl auch Fragen zur menschlichen Lebensspanne verbunden. Im Bewusstsein der Menschen war die Ungewissheit der Dauer eines menschlichen Lebens, wie es in dem Spruch „Nemo scit, quam longa vita sit futura“ ausgedrückt wird. Bewußt war man sich darüber, dass der Tod keine Altersstufe ausnimmt („mortem omni aetati esse communem“), vgl. Cicero: *Cato* (68). Dies lange vor der berühmten lakonischen Einsicht von John Maynard Keynes (1883 - 1946): „Langfristig sind wir alle tot.“ Seinen Ruhm verdankte er dem Buch *Die allgemeine Theorie der Beschäftigung, des Zinses und des Geldes* (1936).

In Platons (427 - 347 v. Chr.) Dialog *Timaios* (Die Weltschöpfung) wurde schon die Lebensdauer des Menschen erörtert: Die Wahl fiel auf die kürzere, doch edlere Lebenszeit anstelle einer längeren, doch unbedeutender hingebrachten Lebensspanne.

Zur Dauer des menschlichen Lebens äußert sich auch die Bibel. Kurz und bündig heißt es im Psalm 90,10: „Unser Leben währet siebzig Jahre, und wenn es hoch kommt, sind es achtzig.“

Das Leben in Babylonien war wie überall in der Antike – aus heutiger Sicht – hart und kurz, so Michael Jursa in seiner Schrift *Die Babylonier*. Nach seinen Ausführungen hatten Männer eine Lebenserwartung von etwa 43 und Frauen von etwa 37 Jahren. Michael Jursa beruft sich dabei auf Untersuchungen von Friedhöfen.

Lebensabschnitte des Menschen

Nach der griechischen Mythologie tötete die Sphinx jeden, der das Rätsel: Was ist am Morgen vierfüßig, am Mittag zweifüßig, am Abend dreifüßig? nicht lösen konnte. Ödipus riet, dass der Mensch gemeint sei, der als Kind auf Händen und Füßen kriecht, als Greis den Stock zu Hilfe nimmt.

Mit Lebensalter können auch die Abschnitte der körperlichen und geistig-seelischen Entwicklung des Menschen gemeint sein. Man unterscheidet das embryonale, das Säuglings-, Kindes-, Jünglings- (Jungfrauen-), Mannes- (Frauen-) und Greisen- (Matronen-) Alter.

Seneca beschreibt die Lebensabschnitte folgendermaßen (*ep*.12,6):
„Das ganze Leben besteht aus Abschnitten in Form von größeren und kleineren konzentrischen Kreisen: Einer ist es, der alle übrigen umfasst und umringt; dieser reicht vom Geburts- bis zum Todestag; es gibt einen zweiten, der die Jugendjahre einschließt; ein weiterer umspannt mit seinem Umfang die ganze Kindheit; hierauf folgt das Jahr als solches, welches alle Zeitabschnitte beinhaltet, aus deren Vervielfachung sich das Leben zusammensetzt; der Monat wird von einem engeren Kreis umgeben; den engsten Zirkel hat der Tag, doch auch dieser kommt vom Anfang zum Ende, vom Aufgang zum Untergang."

Lebensphasen in eine Rechenaufgabe gekleidet

Eine Textaufgabe erlangte beinahe eine klassische Berühmtheit. Das Alter des griechischen Mathematikers Diophantos kennt man deshalb, weil Abschnitte seines Lebens in der Form eines algebraischen Rätsels beschrieben wurden. Er lebte etwa im dritten Jahrhundert nach Christus und starb im Alter von 84 Jahren.

Mittlere Lebensdauer und Höchstalter

In der Biologie unterscheidet man zwischen der durchschnittlichen (mittleren) Lebensdauer der einzelnen Arten von Lebewesen und der Höchst-Lebensdauer, die unter günstigen Verhältnissen erreicht werden kann.

Der menschlichen Lebenszeit ist eine natürliche Grenze gesetzt. Wo aber liegt sie? Diese Frage ist zu vielschichtig und daher fast müßig. Pauschal lässt sie sich nicht festlegen.

Die Bestrebungen nach weiterer Streckung der menschlichen Lebensspanne kann die Medizintechnologie beflügeln. Die Endlichkeit des Menschen setzt aber auch der Medizin Grenzen. Was vergänglich ist, unterliegt dem Prozess der Oxidation (Aufnahme von Sauerstoff). „Tod ist Ziel der Natur, nicht Strafe", so Cicero.

Carl. F. von Weizsäcker wies in seinem Buch *Der Mensch in seiner Geschichte* darauf hin, dass auch der Alterungsprozess von Individuen einen der Spezies nützlichen artspezifischen ‚vorgeplanten' Ablauf zu haben scheint. Die SZ versah in ihrer Ausgabe vom 20./21. Februar 1999 einen Aufsatz des Molekularbiologen Mark Benecke mit der Überschrift *Der Tod bleibt immer Sieger*. Ein Abschnitt dieses Beitrags trug die Überschrift „Vielleicht gelingt es, den Takt der Lebensuhr langsamer zu stellen. Sehr viel gewonnen ist damit nicht. Das Leben wird länger, aber auch langweiliger."

Hundert Lebensjahre im Menschenleben scheinen für Horaz (65 - 8 v. Chr.) und für Seneca „Höchst- oder Traumgrenzen" für menschliches Leben gewesen zu sein. „Ja, wer hundert Jahre hinter sich hat, der ist alt und verdient Ansehen!" (Horaz, *ep*. 2,1,35).
„Du bist, das sehen wir, an das Ende des Menschenlebens gekommen; hundert Jahre oder noch mehr drücken dich." (Seneca, *brev*. 3,2). Centum annos complere (Volle hundert Jahre alt werden) fand auch Eingang in Wörterbücher (zum Beispiel: *Der kleine Stowasser*).

Die heutigen Verhältnisse geben folgendes Bild: Während sich die durchschnittliche Lebenserwartung in den letzten hundert Jahren bei der bayerischen Bevölkerung verdoppelte, veränderte sich die maximal zu erwartende Lebensdauer (Altersjahr 100 plus durchschnittliche Lebenserwartung) nur unwesentlich, vgl. „Bayern in Zahlen" 132.(55.) Jahrgang, 8/2001, S. 303. Siehe hierzu auch Abb. 1.

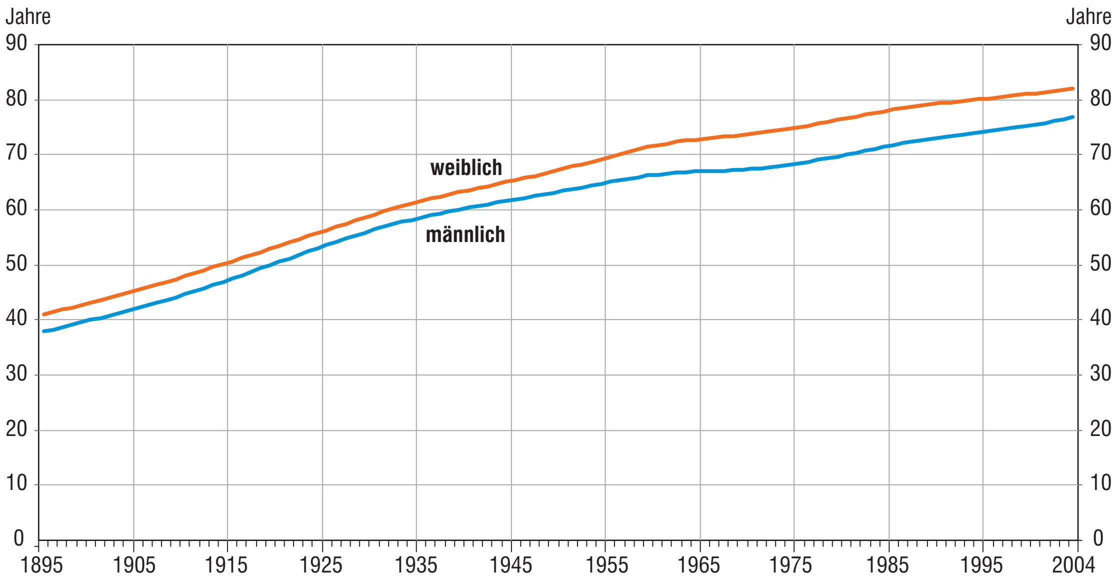
Lebenserwartung in der Bevölkerungsstatistik

Bezüglich der „Lebenslänge" eines Menschen lassen sich drei Größen unterscheiden:

- Gesamtlebensdauer, also die Lebensdauer eines Neugeborenen.
- Restlebensdauer einer x-jährigen Person (auch fernere mittlere Lebensdauer oder mittlere Lebenserwartung genannt).
- Schlussalter, also das maximal erreichbare Lebensalter.

In der Bevölkerungsstatistik wird heutzutage die durchschnittliche Anzahl von Jahren, die ein Mensch wahrscheinlich lebt, als Lebenserwartung bezeichnet. Berechnet wird sie anhand von Sterbetafeln. Diese Größe ist für den Aufbau einer Bevölkerung ein wesentliches Kriterium. Die mittlere Lebenserwartung wird u.a. vom Lebensstandard und den gegebenen sozialen Verhältnissen beeinflusst und fällt daher regional unterschiedlich aus.

Abb. 1 **Entwicklung der Lebenserwartung der Bevölkerung Bayerns von 1895 bis 2004***



* Mittels Spline-Interpolation

Altersaufbau einer Bevölkerung

Unter dem Begriff Altersaufbau versteht man die Altersgliederung einer Bevölkerung. Das ist die Stärke der einzelnen Altersklassen zu einem bestimmten Zeitpunkt. Bei graphischer Darstellung ergibt der Altersaufbau eines wachsenden Volkes die Form einer Pyramide, während der Altersaufbau eines Volkes mit geringer Geburtenzahl die Glocken- und schließlich die Urnenform erreicht.

Rat der Alten in Sparta

Im alten Griechenland nannte man die Ältesten des Volkes Geronten. Schon der älteste griechische Dichter Homer, der im 8. Jahrhundert vor Chr. lebte, berichtete von ihnen. In Sparta bildeten 28 über sechzig Jahre alte Geronten den Rat der Alten (Gerusia), ein wichtiges Verfassungsorgan neben den beiden Königen und fünf Ephoren [die fünf auf ein Jahr gewählten obersten Aufsichtsbeamten des alten Sparta].

Klagen eines berühmten Arztes über die Lebensdauer

Am Beginn der *Aphorismen* des berühmten griechischen Arztes Hippokrates (um 460 - 377 v. Chr.) stehen die Kürze des Lebens und die Möglichkeiten der ärztlichen Kunst gegenüber:
„Das Leben ist kurz, die Kunst lang, die Gelegenheit flüchtig, der Versuch gefährlich, das Urtheil schwierig. Es muss aber nicht allein der Arzt das Nöthige thun, sondern auch der Kranke, die Umgebungen und die äußeren Umstände." (W. Buchenwald. Die Aphorismen des Hippocrates. Nördlingen 1840).

Daran knüpft wohl der Famulus Wagner in Goethes *Faust* an: „Ach Gott! die Kunst ist lang, Und kurz ist unser Leben." (Faust, Der Tragödie Erster Teil 558).

In den *Oden* (Carmina) von Horaz (1,4,15) wird geklagt: „… des Lebens kurze Spanne verbietet uns, Pläne für ferne Zeiten anzuzetteln: …" (Übers. von Will Richter).

Seneca zitiert den Ausruf des bedeutendsten Arztes[1] und meint: „Wir haben keine knappe Zeitspanne, wohl aber viel davon vergeudet. Unser Leben ist lang genug und zur Vollendung der größten Taten reichlich bemessen, ..." (*De brev*. 1,1).

Hippokrates beschreibt auch den Eintritt des Endes des menschlichen Lebens (*Aphor*. 8,18): „Das Lebensende ist da, wenn die Lebenswärme sich von unten in der Gegend des Nabels hinaufbegibt oberhalb des Zwergfelles, und alle Feuchtigkeiten sich verzehrt haben."

Im Zusammenhang mit der Hirnwut nannte Hippokrates auch ein Alter: „Die über vierzig Jahre alt sind, und die Hirnwuth be-

1 Hippokrates, Aphorismen 1,1.

kommen, werden nicht leicht geheilt“ (*Aphor*. 8,1). [„Hirnwut oder Hirnwuth“ weist etwa bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts auf wahnhafte, delirante Zustände, ‚hirnwütig‘ entsprechend auf toll, wahnsinnig. (…) nach einer Auskunft von Prof. Dr. Wolfgang U. Eckart.]. Hippokrates muss die Länge eines Jahres vertraut gewesen sein, da er den Wechsel der Jahreszeiten oft anspricht. In Kapitel 3 der Schrift *Über Luft-, Wasser- und Ortsverhältnisse* (vgl. *Antike Heilkunst*) kommt auch das Auftreten von Schlaganfällen bei Menschen, die das Alter von 50 Jahren überschritten haben, zur Sprache.

Abgrenzung von Lebensabschnitten nach Aristoteles

Aristoteles (384 - 322), Schüler Platons und Erzieher Alexander d. Gr., nannte in seiner Schrift *Politik* (7. Buch) für bestimmte Lebensbereiche Altersgrenzen. „Die eigentliche Erziehung aber ist in zwei Abschnitte zu teilen, in die Zeit vom 7. Jahr bis zur Pubertät und in die von dieser bis zum 21. Jahr.“ Das richtige Lebensalter zur Ehe war für ihn: Frauen 18 Jahre und Männer 37 Jahre (Übersetzung von Franz Susemihl).

In Aristoteles *Rhetorik* heißt es im 14. Kapitel: „Der Körper erreicht seine Blüte zwischen dem 30. und 35. Lebensjahr, die Seele aber um das 49. Lebensjahr.“ (Übersetzung von Franz G. Sieveke). In einer Fußnote bemerkt Sieveke hierzu u. a.: „Als älteste uns bekannte Quelle kommt ein Fragment in Frage, das Solon[2] zugeschrieben wird (Sol. Fr. 27 West). Danach wird die Lebenszeit des Menschen auf 70 Jahre festgesetzt und diese unterteilt in 10 Perioden von jeweils 7 Jahren. Die 5. Periode stellt das heiratsfähige Alter für Männer dar, in der 7. Periode erlangt der menschliche Intellekt seinen Höhepunkt.“

Mindestalter römischer Beamter

In der römischen Rechtsgeschichte finden sich Regelungen über altersmäßige Voraussetzungen für bestimmte Ämter. Nach Gerhard Dulckeit hatte sich für die politische Laufbahn eine rangmäßige Ämterfolge herausgebildet, die im Jahr 180 [v. Chr.] gesetzlich bestimmt wurde (*lex Villia annalis*). Vermutlich wurde zugleich in diesem Gesetz ein Mindestalter für die Ausübung eines Amtes festgelegt. Seit Sulla galt:

Quästur (Verwaltung der Staatskasse): 30 Jahre
Prätur (Zivilgerichtsbarkeit): 40 Jahre
Konsulat (Oberste Beamte): 43 Jahre.

So ist in Ciceros Schrift *Laelius* 11 (Über die Freundschaft) zu lesen: „er hat das Konsulat niemals erstrebt und wurde doch zweimal zum Konsul gewählt – das erste Mal vorzeitig, das zweite Mal für ihn zum rechten Zeitpunkt, für den Staat beinah zu spät, …“ Die Rede ist hier von P. Cornelius Scipio Aemilianus Africanus minor, der 147 vor Chr., im 36. Lebensjahr, vom Volk einstimmig zum Konsul gewählt wurde, obwohl er sich für dieses Jahr nur um die Ädilität [Ädilen waren Beamte, die die Ordnungs-, Markt-, Sitten- und Gesundheitsbehörde vertraten] beworben hatte. Als Konsul erhielt er den Oberbefehl im Krieg gegen Karthago, das er 146 eroberte.

Kaiser Augustus (63 v. Chr. bis 14 n. Chr.) hatte manche Ämter bereits vor dem gesetzlich vorgesehenen Zeitpunkt innegehabt; vgl. Sueton *Augustus* 26. Im alten Rom war übrigens jeder freie Bürger vom 17. bis 60. Lebensjahr wehrpflichtig.

Alterseinteilung nach dem römischen Privatrecht

Die Einteilung der Menschen nach dem Alter aufgrund des (alt)römischen Privatrechts zeigt Abb. 2, vgl. Adolph K. von Hartitzsch: Das römische Privatrecht ... . Leipzig 1831.

Altersbereich für Erwerbsfähigkeit und Heirat im Römischen Reich

Im Zusammenhang mit der Gewerbesteuer findet sich bei Joachim Marquardt (*Römische Staatsverwaltung* (1957) Bd. 2, S. 199) folgender Eintrag: „und das *tributum capitis*, welches die Römer in Syrien erhoben, kann auch nur eine Steuer von dem Erwerbe gewesen sein, da zu ihm nur Männer von 14 bis 65 und Frauen von 12 bis 65 Jahren, also erwerbsfähige Personen herangezogen wurden.“ Marquardt bezieht sich dabei auf Ulpian: *Dig*. 50, 15, 3.

„Unter dem Konsulat von Ser. Galba und L. Sulla wählte der Caesar nach langen Überlegungen, wen er für seine Enkelinnen[3] als Ehemänner bestimmen solle - sie standen im heiratsfähigen Alter -, L. Cassius und M. Vinicius aus.“; vgl. Tacitus, *Ann*. VI,15.

Sueton berichtete, dass der römische Kaiser Augustus (63 v. Chr. bis 14 n. Chr.) die Ritterabteilungen häufig einer Prüfung unterzog. So erwähnte Sueton auch: “bald darauf erwies er denen, die älter als 35 Jahre waren, die Gefälligkeit, das Pferd abzugeben, wenn sie es nicht mehr behalten wollten.“ (*Aug* 38,3).

2 Solon (etwa 640-561 v. Chr.) war ein athenischer Gesetzgeber. Zu den in 594 v. Chr. durch ihn veranlaßten Reformen gehörten u. a. eine Einteilung der Bürgerschaft in vier Vermögensklassen (Timokratie).
3 Drusilla und Iulia, Drusilla damals 15 Jahre, Iulia Livilla 14 Jahre alt, beide Töchter des Germanicus.

c) Der Zustand des Alters (status aetatis).

1) Eintheilung der Menschen in Hinsicht ihres Alters in

α) Minderjährige (minores), diejenigen, welche das fünf und zwanzigste Jahr noch nicht zurückgelegt haben. Diese werden wiederum eingetheilt in

aa) Kinder (infantes), welche das siebente Jahr noch nicht erreicht, und

bb) Solche, welche das siebente Jahr überschritten haben (infantia majores). Diese können seyn:

αα) Unmündige (impuberes) oder Mannspersonen, welche noch nicht vierzehn, und Weibspersonen, die noch nicht zwölf Jahre alt. Sie werden

aaa) infantiae proximi genannt, wenn die Mannsperson noch nicht zehn und ein halbes, die Weibsperson noch nicht neun und ein halbes Jahr alt ist, und

bbb) pubertati proximi, sobald sie diese Jahre überschritten haben[90]).

ββ) Mündige (puberes), zu denen Mannspersonen von zurückgelegten vierzehn, und Weibspersonen von zwölf Jahren gehören.

Diese Mündigkeit (pubertas) wird eingetheilt in

aaa) Die unvollkommene Mündigkeit (pubertas minus plena), welche so lange dauert, als Mannspersonen noch nicht achtzehn, Weibspersonen noch nicht vierzehn Jahre alt sind, nachher tritt

bbb) Die vollkommene Mündigkeit (pub. plena) ein.

β) Volljährige (Großjährige, majores), welche das fünf und zwanzigste Jahr erreicht haben. Diese sind nun wiederum entweder

aa) Junge Personen, welche noch nicht sechzig Jahre alt, und

bb) Alte Personen, welche diese Jahre überschritten haben[91]).

2) Aus dem Zustande des Alters entspringende rechtliche Grundsätze.

α) Handlungen der Kinder können weder Rechte noch Verbindlichkeiten bewirken.

β) Ist von der Mündigkeit im Allgemeinen die Rede, so wird die unvollkommene darunter verstanden[92]).

γ) Alten Personen stehen gewisse an den gehörigen Orten erwähnte Vorrechte zu.

...

90) Dieses ist die gewöhnliche Annahme. Richtiger wird dieser Unterschied nach der Beschaffenheit der Leibes- und Geisteskräfte des fraglichen Subjekts bestimmt.–

91) Thibaut Ueber die Senectus. (Arch. f. d. civilist. Prax. Bd. VIII. Nr. II. S. 74 fgg.) –

92) Bei ausgesetzten Alimenten aus besonderer Begünstigung die vollkommene. –

Abb. 2 Abschrift aus: Hartitzsch, Adolph K. von: Das römische Privatrecht. Leipzig 1831, S. 38.

Begräbnislisten im Römerreich

Zur Zeit des römischen Kaisers Nero (37 - 68) wütete eine Pest, die im Laufe eines Herbstes mit 30 000 Begräbnissen die Rechnungsbücher der Libitina (römische Göttin des Begräbniswesens) füllte; vgl. Sueton *Nero* 39. Was stand im Vordergrund der Listenführung? Das Alter der Verstorbenen oder die Kontrolle über die Entrichtung der Abgabe?

Das Modell von Ulpian zur Dauer von Leistungen in Abhängigkeit vom Alter

Der römische Jurist Domitius Ulpianus (um 170 - 228) schuf eine Regel, die für bestimmte Altersgruppen eine zeitliche Begrenzung von Leistungen (Alimente, Legate) vorsah. Mit diesem Modell sollte wohl der mutmaßlichen Lebenserwartung Rechnung getragen werden. Hier zeigt sich der Sinn der Römer für praktische Lösungen. Überhaupt gehört die Ausbildung des Rechtswesens zu den bleibenden Leistungen des Römertums.

Ulpian, ein Schüler von Aemilius Papinianus, gewann unter Kaiser Alexander Severus (reg. 222 - 235) als *Praefectus praetorio* maßgebenden Einfluss auf die Leitung des römischen Staates.

Die von Ulpian geschaffene Regel fand 300 Jahre später Aufnahme in die vom oströmischen Kaiser Justinian (483 - 565) veranlasste Gesetzessammlung *corpus iuris*. Mit diesem großen Gesetzeswerk gab Kaiser Justinian, der Erbauer der Hagia Sophia, dem Rechtsleben eine feste Grundlage. Während mit der Absetzung des Romulus Augustulus durch Odovakar das weströmische Kaisertum endete, kam das Ostreich (Byzantinisches Reich) unter Justinian zur Blüte.

Eine Fortentwicklung des römischen Rechts im Abendland setzte erst mit den italienischen Glossatoren (12./13. Jahrhundert) ein. Irnerius (auch Wernerius) gründete um 1100 in Bolgona die Schule der Glossatoren. Sie machten das *Corpus iuris civilis* durch Randbemerkungen (Glossen) verständlich, schieden Unbrauchbares aus und schufen so die Grundlagen des Gemeinen Rechts (nach Brockhaus).

Die erste Gesamtausgabe des *corpus iuris civilis* gab 1583 Dionysius Gothofredus (1549 - 1622) in Genf heraus.

Die erwähnte Regel von Ulpian findet sich in den *Digesten* 35.2.68, siehe Abb. 3 und Tabelle 1.

Tab. 1

Dauer von Leistungen in Abhängigkeit vom Lebensalter nach Domitius Ulpianus (um 170 bis 228)

Aetas (Alter)	Quantitas alimentorum (Dauer des Kostgelds in Jahren)*
(1) bis unter 20	30
20 bis unter 25	28
25 bis unter 30	25
30 bis unter 35	22
35 bis unter 40	20
40 bis unter 41	19
41 bis unter 42	18
...	...
48 bis unter 49	11
49 bis unter 50	10
50 bis unter 55	9
55 bis unter 60	7
60 oder älter	5

* Anmerkung: Wilhelm Rein erklärt Alimentenobligation mit „Nötige Mittel zum Lebensunterhalt".

Hier die Übertragung ins Deutsche von Frau Dr. Hildegard Lorenz:
„Aemilius Macer im zweiten Buch zum zwanzigsten Gesetz über die Erbgüter.
Nach Ulpian gibt es für die Erstellung einer Berechnung bei den Kostgeldern das folgende Modell:

- vom ersten Lebensjahr bis zum zwanzigsten Jahr wird eine Kostgeldmenge für dreißig Jahre berechnet und für diese Menge wird durch die *Lex Falcidia* (das Falcidische Gesetz) gebürgt,
- aber von zwanzig Jahren bis zum fünfundzwanzigsten Jahr soll eine Kostgeldmenge für achtundzwanzig Jahre,
- von fünfundzwanzig bis dreißig Jahren eine Kostgeldmenge für fünfundzwanzig Jahre,
- von dreißig bis fünfunddreißig Jahren eine Kostgeldmenge für zweiundzwanzig Jahre,
- von fünfunddreißig bis vierzig Jahren eine Kostgeldmenge für zwanzig Jahre berechnet werden,
- von vierzig bis fünfzig Jahren soll eine Berechnung für soviel Jahre erfolgen, wie dem Alter dessen zum sechzigsten Lebensjahr fehlen werden, wenn man ein Jahr nachgelassen hat.
- Aber vom fünfzigsten bis zum fünfundfünfzigsten Jahr soll eine Kostgeldmenge für neun Jahre,
- von fünfundfünfzig Jahren bis zum sechzigsten Jahr eine Kostgeldmenge für sieben Jahre berechnet werden
- und ab sechzig Jahren soll eine Versorgung für fünf Jahre angesetzt werden, unabhängig vom Alter.

Nach Ulpian gebrauchen wir dieses Recht und müssen anhand dessen (demgemäß) die Berechnung des Nießbrauchs erstellen.

Trotzdem war es aber bisher gebräuchlich,

- vom ersten Lebensjahr bis zum dreißigsten Lebensjahr eine Berechnung für dreißig Jahre anzustellen,
- aber ab dreißig Jahren eine Berechnung für so viele Jahre zu veranschlagen, wie zum sechzigsten Jahr zu fehlen scheinen. Also wird niemals über eine Berechnung von dreißig Jahren hinausgegangen. Und so erfolgt schließlich, auch wenn der Nießbrauch des Staates festgesetzt werden soll, sei es auf einfache Weise oder zu Spielen (ad ludos), ebenfalls eine Berechnung für dreißig Jahre."

Bis Edmond Halley im Jahr 1693 eine eigentliche Absterbeordnung vorlegte, dauerte es noch fast 1 500 Jahre.

Beginn des Modells von Ulpian

Die mit dem Modell von Ulpian getroffenen Annahmen zur Lebenserwartung der Altersgruppen lassen sich nicht in eine Absterbeordnung umsetzen.

Nicht eindeutig ist, mit welchem Altersjahr das Modell beginnen soll. „a prima aetate" kann durchaus mit „vom ersten Lebensalter" oder „von der Geburt" übersetzt werden. Diese Frage soll hier nicht gelöst, aber aufgeworfen werden. Wollte man sich diesem Fragenkomplex widmen, dann müssten folgende Punkte Berücksichtigung finden:

- Die hohe Geburtensterblichkeit spricht eher für die Fassung „vom ersten Lebensjahr".
- Spielte damals das Recht über Leben und Tod (ius vitae ac necis) noch eine Rolle?
- Zur Anerkennung eines Neugeborenen: Der Vater hob das Neugeborene auf als Symbol, dass er es anerkennen und erziehen wolle. Cicero beschreibt diese Handlung wie folgt: „Jetzt aber, sobald wir geboren und in die Gemeinschaft aufgenommen sind ..." (*Tusc. disp.* III,1,2).
- War die Kindesaussetzung noch von Bedeutung? Der

68 AEMILIUS MACER libro secundo ad legem uicesimam hereditatium. Computationi in alimentis faciendae hanc formam esse Ulpianus scribit, ut a prima aetate usque ad annum uicesimum quantitas alimentorum triginta annorum computetur eiusque quantitatis Falcidia praestetur, ab annis uero uiginti usque ad annum uicesimum quintum annorum uiginti octo, ab annis uiginti quinque usque ad annos triginta annorum uiginti quinque, ab annis triginta usque ad annos triginta quinque annorum uiginti duo, ab annis triginta quinque usque ad annos quadraginta annorum uiginti. ab annis quadraginta usque ad annos quinquaginta tot annorum computatio fit, quot aetati eius ad annum sexagesimum deerit[2] remisso uno anno: ab anno uero quinquagesimo usque ad annum quinquagesimum quintum annorum nouem, ab annis quinquaginta quinque usque ad annum sexagesimum annorum septem, ab annis sexaginta, cuiuscumque aetatis sit, annorum quinque. eoque nos iure uti Ulpianus ait et circa computationem usus fructus faciendam. solitum est tamen a prima aetate usque ad annum trigesimum computationem annorum triginta fieri, ab annis uero triginta tot annorum computationem inire, quot ad annum sexagesimum deesse uidentur[3]. numquam ergo amplius quam triginta annorum computatio initur. sic denique et si rei publicae usus fructus legetur, siue simpliciter siue ad ludos, triginta annorum computatio fit. [B. 41, 1, 67] *Ef*

1 Si quis ex heredibus rem propriam esse contendat, deinde hereditariam esse conuincatur, quidam putant eius quoque Falcidiam non posse retineri, quia nihil || intersit, subtraxerit an hereditariam esse negauerit: quod Ulpianus recte improbat. f. 106

F(DEQICK)

[1] ita si nihil supersit *ins.* [2] deerunt (*Brencmannus*)? [3] ab annis autem sexaginta annorum quinque *ins.* (*u. i.*)

8 sit quinquagint'a' F^{2}! 10 nam] F^{2} *cum* *B* (*Anon.*): τὸ ληγάτον ἔρρωται καὶ Φαλκίδιον ὑπομένεις *et* *BS* (*Cyr.*), non F^{1} 19 infirmabuntur *f* 24 legi *F* 32 tot] t'ot' F^{2}!, *om.* *DEQICK*: τοσούτων ἐτῶν ἡ ἀποτίμησις γίνεται, ὅσοι λείπουσι τῇ ἡλικίᾳ τοῦ ληγαταρίου, ἵνα γένηται πεντήκοντα ἐννέα *B* (*Anon.*) 38 ab annis uero *seq.*] μετὰ δὲ τριάκοντα ἔτη εἴ τι λείπει τῶν ἑξήκοντα· μετὰ δὲ ἑξήκοντα εἰς πέντε *BS* (*Cyr.*), ἀπὸ δὲ τοῦ τριακοστοῦ ἕως τοῦ ἑξηκοστοῦ τοσούτων, ὅσοι λείπουσι τῷ ληγαταρίῳ εἰς τὸ γενέσθαι αὐτὸν ἑξήκοντα ἐτῶν· εἰ δὲ ὑπὲρ τὰ ἑξήκοντα ἔτη ἐστίν, εἰς πέντε ἔτη ἀποτιμᾶται *B* (*Anon.*) 41 fit *om.* F^{1}

Abb. 3 Übersetzung siehe Seite 33, Aus: Iustinianus „Imperium Byzantinum, Imperator, I.“: Digesta Iustiniani Augusti / recognovit adsumptio in operis societatem Paulo Kruegero Th. Mommsen. Vol. II. Editio altera lucis ope expressa. Berolini MCMLXIII [1963] Apud Weidmannos.

griechisch-römische Arzt Galenus (129 - 199) stellte in seinem Werk *Über die Verfahrensweisen beim Sezieren* (Buch III, aus Kap. 5) fest: „Auch durch häufiges Sezieren toter ausgesetzter Kinder kamen viele zu der Überzeugung, dass der Mensch denselben Körperbau habe wie der Affe.“; vgl. *Antike Heilkunst,* S 108. Galen hatte auch die Erkenntnisse von Herophilos überliefert, der in der ersten Hälfte es dritten Jahrhunderts v. Chr. bereits anatomische Untersuchungen vornahm. Ein bedeutender Anatom war Erasistratos (1. Hälfte des 3. Jahrh. v. Chr.). Mondino de Luzzi zergliederte 1306 öffentlich einen menschlichen Leichnam.

- Verbleibt schließlich noch der damalige Umgang mit Mißbildungen bei Neugeborenen. In Ciceros Schrift *De Legibus* (Die Gesetze) stößt man unter III, 19 auf: „Deformitatem puer“ (das auffallend mißgebildete Kind). Welche Bestimmungen das römische Privatrecht für fehlerhafte Geburten vorsah, kann einer von Adolph K. v. Hartitzsch (*Das römische Privatrecht* ...) stammenden Übersicht entnommen werden.

Offen bleibt, worauf sich die Regel von Ulpian zur „Lebenserwartung“ stützt. Vielleicht beruhen sie auf statistischen Erhebungen. Nachfolgend einige Anmerkungen zu Volkszählungen im Altertum.

Exkurs: Volkszählungen in der Antike

Von Volkszählungen wird im *Alten Testament* berichtet (Num 1,46 und 2 Sm 24,5 - 9). An dieser Stelle ein grober Streifzug zu den Erhebungswerken in vormaliger Zeit. Schon in früher Zeit bestand von Seiten des Staates ein Interesse an Bevölkerungszahlen. Dies nicht nur um die Bürger zu behüten, sondern auch um sie zu besteuern und zum Kriegsdienst zu rufen. Es gilt als sicher, dass im Mari-Reich am Euphrat bereits um das Jahr 2 000 v. Chr. Erhebungen für Zwecke der Besteuerung und des Militärdienstes gängig waren. Dass die Steuern schon immer einen hohen Stellenwert einnahmen, zeigt eine aus Ägypten stammende große Schriftrolle mit Steuereinschätzungen (Wilbour-Papyrus); vgl. Cornfeld, Gaalyahu: Von Adam bis Daniel. Würzburg 1962, S.115.[4]

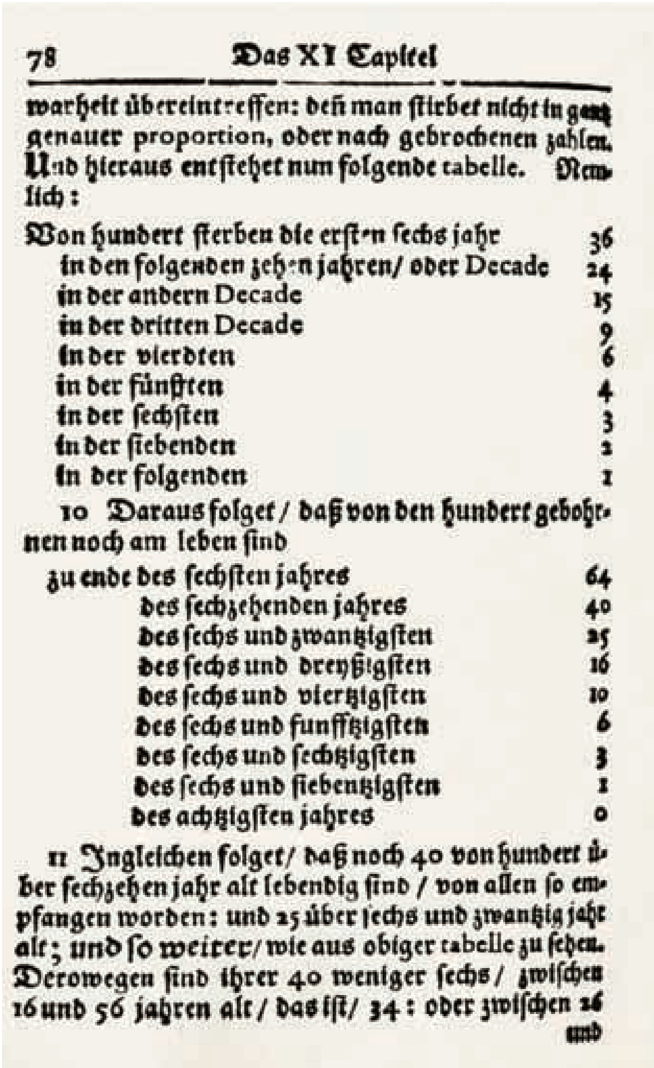
Eine Vermögensschätzung dürfte auch bei jener Aufzeichnung im Vordergrund gestanden haben, von der im N.T. bei Lukas 2, 2 berichtet wird. Wie auch immer: Der Census im Jahr 6 n. Chr. ist es, auf den sich Lukas zu beziehen scheint. Judaea fiel damals an Rom; ein Königreich wurde zur Provinz. Der jüdische Geschichtsschreiber Flavius Josephus (geb. 37 n. Chr.) berichtete, dass Quirinius (ein gewesener Konsul) vom Cäsar [Kaiser Augustus] gesandt worden ist, um Syrien und Judaea einzuschätzen und des Archelaus Güter zu verkaufen (*Ant. Jud*. 17,13 und 18,1). Judas der Galiläer beredete das Volk, sich der Einschätzung zu widersetzen und so kam es zu einem heftigen Aufruhr. Hierüber wird auch in der *Apostelgeschichte* 5,37 berichtet. Dieser regionale Zensus hatte sich wegen der dramatischen Begleiterscheinungen wohl sehr tief in das Gedächtnis der Menschen eingeprägt und ließ vermutlich die Erinnerung an die früheren Zählungen verblassen.

Kaiser Augustus zählt in seinem „Tatenbericht“ (*res gestae* 8) die drei in seiner Regierungszeit durchgeführten Zensen[5] auf: 28 v. Chr., 8 v. Chr. und 14 n. Chr. Der zweite Zensus war es wohl, an den die Weihnachtsgeschichte erinnert. Der österreichische Astronom Konradin Ferrari d'Occhieppo ist überzeugt, dass der Stern von Bethlehem der Planet Jupiter war, der im Jahr 7 v. Chr. eine nahe und lang andauernde Begegnung mit dem Planeten Saturn hatte. König Herodes der Große verstarb irgendwann im Frühjahr 4 v. Chr.

Erstaunen lässt der Bericht von Plinius d. Ä. (*Nat. Hist*. VII) über die letzte Volkszählung, welche die beiden Kaiser Vespasian Vater (reg. 69 - 79) und Sohn (reg. 79 - 81) als Censoren durchführen ließen. Gemeint ist die „Häufigkeitsverteilung“ nach Altersjahren für den achten Bezirk Italiens; 54 Personen mit 100 Altersjahren, 2 Personen mit 125 Altersjahren, 4 Personen mit 130 Altersjahren usw. Ob die Altersangaben zutreffen, sei dahingestellt. Bemerkenswert ist aber die Gliederung.

Höchstpreisedikt von Diokletian: Preise für Sklaven

Nach römischem Recht war es nicht statthaft, auf das Leben eines freien Bürgers einen Geldbetrag auszusetzen. Beachtenswert ist, dass im Höchstpreisedikt des römischen Kaisers Diokletian (reg. 284 - 305) die Preise für Sklaven nach Altersgruppen und nach dem Geschlecht festgesetzt wurden. Der im Pergamonmuseum Berlin gezeigte Ausschnitt aus Diokletians Höchstpreisedikt vom Jahr 301 n. Chr. wurde erst durch einen



78 Das XI Capitel

warheit übereintreffen: denn man stirbet nicht in gantz genauer proportion, oder nach gebrochenen zahlen. Und hieraus entstehet nun folgende tabelle. Nemlich:

Von hundert sterben die ersten sechs jahr	36
in den folgenden zehen jahren/ oder Decade	24
in der andern Decade	15
in der dritten Decade	9
in der vierdten	6
in der fünfften	4
in der sechsten	3
in der siebenden	2
in der folgenden	1

10 Daraus folget / daß von den hundert gebohrnen noch am leben sind

zu ende des sechsten jahres	64
des sechzehenden jahres	40
des sechs und zwantzigsten	25
des sechs und dreyßigsten	16
des sechs und viertzigsten	10
des sechs und funfftzigsten	6
des sechs und sechtzigsten	3
des sechs und siebentzigsten	1
des achtzigsten jahres	0

11 Ingleichen folget/ daß noch 40 von hundert über sechzehen jahr alt lebendig sind / von allen so empfangen worden: und 25 über sechs und zwantzig jahr alt; und so weiter/ wie aus obiger tabelle zu sehen. Derowegen sind ihrer 40 weniger sechs/ zwischen 16 und 56 jahren alt / das ist/ 34: oder zwischen 26 und

Abb. 4 Aus: Graunt, Johannes: Natürliche und politische Anmerckungen über die Todten-Zettul der Stadt Londen … . Leipzig 1702.

4 Die ägyptischen Steuereinnehmer verfügten über eine Formel für das Fassungsvermögen eines zylindrischen Kornspeichers.

5 Die unter Augustus durchgeführten Volkszählungen wurden straßenweise vorgenommen, vgl. Sueton: Augustus 40,2.

Inschriftenfund vom Jahr 1970 bekannt. In tabellarischer Form ergibt sich folgendes Bild:

Über die Preise der Sklaven nach dem Höchstpreisedikt von Diokletian aus dem Jahr 301

Altersgruppe in Jahren	Preise in Denar	
	männlich	weiblich
jünger als 8	15 000	10 000
8 bis 16	20 000	20 000
16 bis 40	30 000	25 000
40 bis 60	25 000	20 000
60 oder älter	15 000	10 000

Quelle: Pergamonmuseum Berlin (Münzkabinett) - Ausschnitt aus Diokletians Höchstpreisedikt vom Jahre 301 u.Z. Vom Markt in Aizanoi in Phrygien (Cavdarhisar). Kopie.

Weiter heißt es: „Für einen Ausgebildeten kann nach Geschlecht, Alter und Art der Fähigkeiten zwischen dem Käufer und dem Verkäufer ein Preis bis zu der Höhe vereinbart werden, dass das Doppelte des amtlichen Sklavenpreises nicht überschritten wird.“

Erste Absterbeordnung von Graunt

John Graunt (1620 - 1674) suchte als Erster aus Londoner Geburts- und Sterbelisten zu Gesetzmäßigkeiten der Bevölkerungsbewegung zu gelangen. Im Jahr 1662 publizierte Graunt seine *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality.* Er hatte Aufzeichnungen über die Sterbefälle in London gesammelt und fertigte eine Tabelle über das Absterben. Sie ist die erste bekannte „Absterbeordnung“, die aber mehr auf Überlegungen als auf Beobachtungen beruhte. Diese Aufstellung diente einigen für weitere Untersuchungen, wobei den Anwendern nicht bekannt war, dass die Tabelle von der Wirklichkeit abwich. Die von Graunt entworfene Tabelle über das Absterben findet man auch in der in deutscher Sprache gedruckten Schrift *Natürliche und politische Anmerckungen über die Todten-Zettul der Stadt Londen*, Leipzig 1702 (s. Abb. 4). Abbildung 5 zeigt einen Ausschnitt aus diesem Werk.

Lodewijk Huygens hatte bereits die Idee, dass diese Angaben von Graunt sowohl für die Berechnung von Leibrenten als auch zur Bestimmung der Lebenserwartung verwendet werden könnten. Darüber korrespondierte er 1669 mit seinem berühmten Bruder Christiaan.

Jakob Bernoulli betonte die Notwendigkeit von Sterbetafeln

Jakob Bernoulli (1655 - 1705)[6] machte auf die theoretische und praktische Wichtigkeit der Mutmaßungskunst aufmerksam. Er betrachtete nicht nur Glücksspiele, sondern er wandte die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch auf Todesfälle an. So befasste er sich mit der Schätzung von Sterbewahrscheinlichkeiten und Lebenserwartungen. Ihn interessierte u. a. die Wahrscheinlichkeit, dass eine junge, gesunde Frau früher sterben wird als ein bedeutend älterer Mann. Dabei gelangte er zu der Erkenntnis, dass Sterbewahrscheinlichkeiten nicht a priori berechnet, sondern nur aus Erfahrung geschätzt werden können und dazu benötigt man Sterbetafeln. Sein für die Wahrscheinlichkeitsrechnung bedeutsames Werk wurde 1713 posthum veröffentlicht. Der Titel dieser Schrift lautet: *Ars conjectandi* (Kunst der Mutmaßung), opus posthumum.


Natürliche und Politische
Anmerckungen
über die todten-zettul.
Das I Capitel
Von den todten-zettuln/ ihrem anfang und fortgang.
Die ersten wochentlich-continuirenden Todtenzettul/ so in den kirchenbüchern verhanden sind/ fangen sich an den 19 Decemb. im jahr 1603/ welches das erste jahr der regierung Königs Jacobi ist: Von welcher zeit an man wöchentliche rechnungen derer todten und täufflinge gehalten hat. Es ist wol wahr/ daß ältere zettul vorhanden sind/ nemlich von anno 1591. 1593. 1594: allein es ist die ordnung derselben von anno 1594 biß 1603 so vielfältig unterbrochen/ daß ich keine genugsame nachricht daraus nehmen können. Dannenhero ich bey denen rechnungen/ welche von anno 1603 in guter ordnung auff einander folgen/ allein geblieben bin/ als die mir zu allem dem/ wozu
A ich

Abb. 5 Aus: Graunt, Johannes: Natürliche und politische Anmerckungen über die Todten-Zettul der Stadt Londen … . Leipzig 1702.

Der Astronom Edmond Halley veröffentlichte 1693 eine erste Sterbetafel

Neue Wege zur Sterblichkeitsmessung und der Bewertung von Leibrenten beschritt der berühmte Astronom Edmond Halley

6 Geboren am 6. Januar 1655 [27. Dezember 1654 alter Stil]

(1656 - 1742). In den *Philosophical Transactions* 17, pp. 596 - 610 erschienen 1693 seine Ausführungen zur Sterblichkeit der Menschheit, deren Titel Abb. 6 zeigt.

Der Titel dieser Schrift lautet (ins Deutsche übertragen von Peter Dotzauer): „Eine Schätzung des Grades der Sterblichkeit der Menschheit, hergeleitet von wunderlichen Tabellen der Geburten und Begräbnisse in der Stadt Breslau; mit dem Versuch, den Preis der Rente auf Leben festzusetzen. Von Hrn. E. Halley, R.S.S.“

An Eſtimate of the Degrees of the Mortality *of Mankind, drawn from curious* Tables *of the* Births *and* Funerals *at the City of* Breſlaw; *with an Attempt to aſcertain the Price of* Annuities *upon* Lives. *By Mr.* E. Halley, *R.S.S.*

Abb. 6 Aus: Philosophical Transactions, 17 (Numb. 196). London 1693. p. 596 - 610.

Halley stützte sich auf Verzeichnisse über Geburten und Todesfälle der Stadt Breslau. Dort wurden das Alter und das Geschlecht der Verstorbenen schon aufgezeichnet. Halley hielt für seine Untersuchung die auf Breslau bezogenen Daten für geeigneter als jene Unterlagen, die London betrafen. Das von Halley ausgewertete Datenmaterial stammte von dem Geistlichen und Gelehrten Caspar Neumann. Dieser sandte die Ergebnisse seiner Untersuchung an Leibniz. Durch Henry Justell kamen diese Daten Halley zur Kenntnis.

Abb. 7 zeigt die erste Sterbetafel oder Überlebendentafel (Absterbeordnung), deren Konstrukteur Halley ist. Die Überschrift wurde von Peter Dotzauer ins Deutsche übertragen: „Diese *Tabelle* zeyget dazu beygefüget die *Anzahl* der *Personen*, welche im gegenwärtigen *Alter* leben, wie folget:“ Halley bemerkte zu

This *Table* does ſhew the *number* of *Perſons* that are living in the *Age* current annexed thereto, as follows:

Age. Curt.	Perſons.	Age. Curt.	Perſons	Age. Curt.	Perſons	Age. Curt.	Perſons	Age. Curt.	Perſons	Age. Curt.	Perſons
1	1000	8	680	15	628	22	585	29	539	36	481
2	855	9	670	16	622	23	579	30	531	37	472
3	798	10	661	17	616	24	573	31	523	38	463
4	760	11	653	18	610	25	567	32	515	39	454
5	732	12	646	19	604	26	560	33	507	40	445
6	710	13	640	20	598	27	553	34	499	41	436
7	692	14	634	21	592	28	546	35	490	42	427
Age. Curt	Perſons.	Age. Curt.	Perſons	Age. Curt.	Perſons	Age Curt	Perſons	Age. Curt.	Perſons	Age. Curt.	Perſons
43	417	50	346	57	272	64	202	71	131	78	58
44	407	51	335	58	262	65	192	72	120	79	49
45	397	52	324	59	252	66	182	73	109	80	41
46	387	53	313	60	242	67	172	74	98	81	34
47	377	54	302	61	232	68	162	75	88	82	28
48	367	55	292	62	222	69	152	76	78	83	23
49	357	56	282	63	212	70	142	77	68	84	20

Age.	Perſons.
7	5547
14	4584
21	4270
28	3964
35	3604
42	3178
49	2709
56	2194
63	1694
70	1204
77	692
84	253
100	107
	34000
Sum Total.	

Abb. 7 Aus: Philosophical Transactions, 17 (Numb. 196). London 1693. p. 596-610.

dieser Tabelle, dass ihre Verwendung vielfältig ist. Nachfolgend werden einige Ausschnitte aus seinem Werk hier wiedergegeben.

„Anwendung III. Aber wenn es gefragt sei, nach welcher Anzahl von Jahren eine fünfzigprozentige Aussicht besteht, dass eine Person beliebigen *Alters* sterben wird, bietet es diese Tabelle sogleich dar: Denn wenn die *Anzahl* der *lebenden* Personen des vorgegebenen Alters *halbiert* wird, dann wird man in der *Tabelle* finden, bei welchem Jahr die genannte *Anzahl* durch die *Sterblichkeit* zur Hälfte verringert wird; und jenes ist das Alter, zu dem eine fünfzigprozentige Wette gilt, dass es eine Person des vorgegebenen Alters erreichen wird, bevor sie *sterbe*…"

Ohne weitere Erklärung ein Passus aus Halley's Anwendung II: „… wie sind die Aussichten, dass ein Mann von 40 noch 7 Jahre lebt: Man nehme die Anzahl von Personen, die 47 Jahre zählen, welche in der Tabelle 377 ist, und subtrahiert sie von der Anzahl der Personen von 40 Jahren, welche 445 ist, und die Differenz ist 68: was zeigt, dass die Personen, die in jenen sieben Jahren sterben, 68 sind, und dass es 377 zu 68 oder 5 ½ zu 1 ist, dass ein Mann von 40 (noch) 7 Jahre lebt. Und ähnlich für jede andere Anzahl von Jahren."

Halley bestimmte außerdem den Wert einer Leibrente, allerdings nur für jedes fünfte Lebensalter. Seinen Berechnungen lag ein Zinssatz von 6 % zugrunde. Zu praktischen Anwendungen haben die Forschungen von Halley erst Jahrzehnte später geführt. Beiläufig sei erwähnt, dass auf Kosten von Halley 1687 Newton's *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* gedruckt wurde. Für eine Erstausgabe dieser Schrift wird heute je nach Prominenz ihrer Vorbesitzer ein fünf- bis sechsstelliger Betrag bezahlt.

Mittlere Lebensdauer und wahrscheinliche Lebensdauer

Halley gebrauchte als erster (1693) den Begriff „wahrscheinliche Lebensdauer" (heutige Sprechweise). „Mittlere Lebensdauer" stammt von Déparcieux (1746). Ihm zufolge findet man diesen Wert, indem man eine große Zahl von Menschen nimmt, deren Lebensjahre von der Geburt bis zum Tode zusammenzählt und die erhaltene Summe durch die Zahl der Menschen teilt. (Friedrich Huber: Daniel Bernoulli (1700 - 1782) als Physiologe und Statistiker. Basel 1959, S. 88).

Peter Süßmilch (1707 - 1767) hielt die Methode von Déparcieux (1703 - 1768) nicht nur für mühsam, sondern auch für nicht nötig. Er betrachtete die Vorgehensweise von Halley für ausreichend. Nikolaus Bernoulli (1687 - 1759), ein Neffe von Jakob Bernoulli, unterschied deutlich zwischen der mittleren künftigen Lebenserwartung und dem Alter, das genau die Hälfte einer bestimmten Altersgruppe erreicht.

Die mittlere Lebensdauer und die wahrscheinliche Lebensdauer sind wichtige Kennzahlen. Im Augustheft 2001 von „Bayern in Zahlen" wurden sie auf Seite 296 „Ergebnisse der Sterbetafel 1996/98" ausführlich beschrieben.

Nützlichkeit der Inokulation mit Halley's Tafel unter Beweis gestellt

Im 17. Jahrhundert fegten mehrere Pockenepidemien über Länder und Erdteile hinweg. Den Höhepunkt ihrer Ausbreitung erlebte die Krankheit im 18. Jahrhundert. „Von Pocken und Liebe bleiben nur wenige frei" war damals ein geflügeltes Wort. Von Konstantinopel aus gelangte die Inokulation zur Bekämpfung der Pocken nach England. Man stand ihr skeptisch gegenüber. Daniel Bernoulli (1700 - 1782) verwendete die Tafel von Halley zur Abschätzung des Einflusses dieser epidemischen Krankheit auf die Sterblichkeit. Er stellte damit die Nützlichkeit der Inokulation [Impfung][7] unter Beweis – trotz einer Fehlinterpretation der Tafel von Halley, vgl. Friedrich Huber.

Nikolaus Bernoulli schätzte die Dauer des menschlichen Lebens

Nikolaus Bernoulli (1687 - 1759) benutzte die von Graunt erstellte Tabelle über das Absterben zur Schätzung der mittleren künftigen Lebenserwartung. Tabelle 2 zeigt, wie er dabei vorging.

Für einen Neugeborenen kommt Nikolaus Bernoulli zu einer mittleren Lebenserwartung von 18,22 Jahren und für ein sechsjähriges Kind zu einer solchen von 20,78 Jahren. Für die übrigen Altersjahre ergibt sich folgendes Bild:

eine 16jährige Person	20,25 Jahre
eine 26jährige Person	19,40 Jahre
eine 36jährige Person	17,50 Jahre
eine 46jährige Person	15,00 Jahre
eine 56jährige Person	11,67 Jahre
eine 66jährige Person	8,33 Jahre
eine 76jährige Person	5,00 Jahre.

7 Die Schutzwirkung der Kuhpocken beim Menschen untersuchte Edward Jenner (1749 - 1823) und 1796 führte er die erste Impfung durch.

Tab. 2 Berechnung der mittleren Lebenserwartung von Nikolaus Bernoulli nach der Absterbeordnung von Graunt

Nach Graunt sterben von 100 Personen		Berechnung der Lebenserwartung nach Nikolaus Bernoulli für					
		einen Neugeborenen		ein sechsjähriges Kind		eine 16jährige Person	
im Alter von ... Jahren	Anzahl der Personen	Altersjahr*	Sp.2 • Sp.3	Sp.3 - 6	Sp.2 • Sp.5	Sp.3 - 16	Sp.2 • Sp.7
Sp.1	Sp.2	Sp.3	Sp.4	Sp.5	Sp.6	Sp.7	Sp.8
0	36	3	108	x	x	x	x
6	24	11	264	5	120	x	x
16	15	21	315	15	225	5	75
26	9	31	279	25	225	15	135
36	6	41	246	35	210	25	150
46	4	51	204	45	180	35	140
56	3	61	183	55	165	45	135
66	2	71	142	65	130	55	110
76	1	81	81	75	75	65	65
86	-	.					
Summe x	100	x	1822	x	1330	x	810
Lebenserwartung in Jahren			$\frac{1822}{100} = 18{,}22$		$\frac{1330}{64} = 20{,}78$		$\frac{810}{40} = 20{,}25$

* Mittelwert von jeweils zwei aufeinander folgenden Zeilen der Spalte 1

Er wusste allerdings nicht, dass die Tabelle von Graunt mehr auf Überlegungen als auf Beobachtungen beruhte. Die von ihm geschätzte Lebenserwartung benutzte Nikolaus Bernoulli zur Bestimmung des Preises einer Rente auf das Leben einer Person, welche noch n Jahre leben wird. Hierauf wird im nächsten Beitrag *Bemerkenswertes zu Geldgeschäften und die Anfänge des Versicherungswesens* eingegangen.

Nikolaus Bernoulli standen auch empirische Angaben einer Stadt in der Schweiz zur Verfügung, die auf 2 000 Personen basierten. Hieraus berechnete er die Lebenserwartung für verschiedene Altersklassen. Leider nannte er nicht die Ursprungsdaten. Für einen Nulljährigen ermittelte er eine Lebenserwartung von 27 Jahren. Die auf ganze Jahre abgerundete Lebenserwartung für verschiedene Altersklassen gibt folgendes Bild (Aus: Die Werke von Jakob Bernoulli. Band 3. Hrsg. von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel 1975, S. 548):

Alter	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
Lebens-erwartung	27	38	37	33	30	27	25	22	20	18	15	12	10	8	7	5	4	3

Aufzeichnung des Alters von Verstorbenen

Von Nikolaus Bernoulli (1687 - 1759) kam die Anregung, dass die Pfarrherren in den Totenbüchern das Alter der Verstorbenen genauer angeben. Zur weiteren Entwicklung der Registrierung des Sterbealters im Rahmen der Sterblichkeitsmessung:

Friedrich Benedikt Wilhelm von Hermann (1795 - 1868) klagte darüber, dass die Sterbefälle nicht nach einzelnen Altersjahren aufgezeichnet werden. Er bemerkte: „Selbst in Schweden, das unter allen Staaten am frühesten vollständige Kenntnis der Bevölkerung und ihrer Bewegung sich zu verschaffen suchte, findet sich doch der eine Mangel, dass man die Sterbefälle nicht nach einzelnen Altersjahren, sondern nach Gruppen von 5 zu 5 Altersjahren summarisch verzeichnete.“ (*17. Heft der Beiträge zur Statistik des Königreichs Bayern,* 1867, S. III). Mit der Übernahme der Leitung der bayerischen Statistik veranlasste von Hermann die Erfassung des Alters für jeden Sterbefall.

An anderer Stelle wurde schon erwähnt, dass der große Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) besonderen Wert auf Sterbetafeln legte. Besonders interessierte er sich für die beiden äußersten Grenzen des menschlichen Lebens. Zum Ausdruck kommt dieses Anliegen mit folgendem Zitat (Gauß in einem Brief an Alexander von Humboldt, Göttingen, 14./15. 4. 1846): „Wäre ich ein Rothschild, so würde ich einen Fonds von einer Million stiften, dessen Zinsen jährlich unter die 400 ältesten Bewohner eines großen Staats verteilt würden mit der Bedingung, dass ihr Alter und fortdauerndes Leben auf das vollkommenste nachgewiesen sei. So würde man schon zuverlässige Resultate erhalten.“, vgl. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst: Carl Friedrich Gauß in Göttingen; [Ausstellung im alten Rathaus am Markt vom 23.2. - 15.5.2005]. Herausgegeben von Elmar Mittler. Göttingen 2005.

Walter Swoboda, der die ersten drei bayerischen Sterbetafeln der Nachkriegszeit erstellte, wies bei der Sterbetafel 1970/72 darauf hin, dass das Beobachtungsmaterial vom Alter ab 95 Jahren aufwärts unzureichend war („Zeitschrift des Bayerischen Statistischen Landesamts“, 106. Jg., 1974, S. 2).

Formel zur Berechnung der Lebenserwartung

Nikolaus Bernoulli erkannte, dass die Zahlen zur Lebenserwartung leichter gefunden werden, wenn man am Ende anfängt. Die von ihm benutzte Formel wird in heutiger Schreibweise hier vorgestellt: $e_x = \frac{1}{l_x}\left[\left(l_x - l_{x+1}\right)\cdot\frac{1}{2} + l_{x+1}\left(1+e_{x+1}\right)\right]$.

Diese Formel zur Berechnung der mittleren künftigen Lebenserwartung kann sowohl für eine Sterbetafel der heutigen Zeit als auch zum Beispiel für die von Tetens bei seinen Leibrentenberechnungen verwendete Tafel nach Süßmilch gebraucht werden (siehe *Die Werke von Jakob Bernoulli*. Band 3. Hrsg. von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Basel 1975, S. 544).

Die Schriften von Leibniz zu Sterblichkeitsproblemen und Leibrenten

„Trotz des Bekanntheitsgrades von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) sind seine versicherungswirtschaftlichen und finanzwissenschaftlichen Schriften kaum bekannt und zum großen Teil nur in den französischen und lateinischen Urschriften zugänglich“, so J.-Matthias Graf von der Schulenburg im Vorwort zu den *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik* von Leibniz aus dem Jahr 2000.[8]

Artus Gouffier (1620 - 1696), bekannt als Herzog von Roannez, unterbreitete Leibniz 1675 in Paris ein Sterblichkeitsproblem. Leibniz vermerkte hierzu: „Mons. le duc de Roannez hat mir dieses Problem vorgelegt: Von 64 Menschen sind innerhalb von zehn Jahren 36 gestorben. Gefragt wird, wie viele in einem beliebigen Jahr gestorben sind.“

Menschliche Lebensabschnitte nach Leibniz

Die Abgrenzung der Abschnitte des menschlichen Lebens durch Leibniz (um 1680) gibt folgendes Bild:
„Die jahre der schwachheit sind folgende, die Kinder bis 5 jahr sind sehr dem todt unterworffen, bleiben also bis 18 à 30 (18 bis 30) jahr in ihren vigor [Lebenskraft]. Hernach verfallen junge leute leicht zu debauche [Ausschweifung] bis 28 à 30 (28 bis 30) jahr, denn sind sie in der weisen krafft Verstandes und leibes, darinn kan man sezen bis 45 à 50 (45 bis 50) jahr, denn nehmen sie wiederab bis 60 jahr; dann ist apparenz zum tode; und von 60 bis 70 noch mehr apparenz, et von 70 bis 80 ist wenig apparenz zu leben. Das sind die principia, umb von Leibrenten zu urtheilen.“

Berechnung der Lebensdauer nach Leibniz

Zur mittleren Dauer eines menschlichen Lebens schrieb Leibniz: „Der Heiligen Schrift und der Erfahrung folgend gehe ich davon aus, dass die größtmögliche Dauer des menschlichen Lebens 80 Jahre beträgt, d.h., dass die Menschen höchstens 80 Jahre alt werden, aber dass sie nicht das Alter von 81 Jahren erreichen, eine Zahl, die von einigen als die oberste Schwelle bezeichnet wird, weil sie 9 mal 9 ist. Die geringe Zahl jener, die dieses Alter überschreiten, ist zu vernachlässigen“. Vielleicht dachte Leibniz dabei an Platon (427 - 347 v. Chr.), der an seinem 81. Geburtstag verstarb (Seneca *ep*. 58,31).

Leibniz ging davon aus, dass die mittlere Dauer des Lebens 40 Jahre beträgt und dass eine Leibrente, die für ein vor kurzem geborenes Kind gekauft wurde, gleichwertig mit einer 40 Jahre währenden Pension zu erachten ist. Dabei orientierte sich Leibniz offenbar an einer arithmetischen Folge, ohne dies so auszusprechen. Er hielt es für langweilig, die Summe der Zahlen 1 + 2 + 3 + … + 80 zu bilden und so bediente er sich einer kurzen Regel. Auf 80 Lebensjahre bezogen:

$$\frac{\frac{(1+80)\cdot 80}{2}}{81} = 40.$$

Dieses Vorgehen von Leibniz erinnert an den neunjährigen Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855). Sein Lehrer Büttner soll der Klasse die Aufgabe gestellt haben, eine arithmetische Folge zu addieren. Aufgaben über arithmetische und geometrische Reihen gab es schon bei den Mathematikern Ägyptens und Babylons.[9] Auf eine arithmetische Reihe führt eine Erbteilungsaufgabe, die aus dem alten Babylon stammt. Eine arithmetische Reihe entsteht aus den Gliedern einer arithmetischen Folge.

Historisches zum Durchschnitt

Leibniz erinnerte im Rahmen seiner Mittelwertbildung an das Vorgehen der Bauern bei der „Braunschweiger Teilung“. Gemeint ist damit die Teilung einer Erbschaft oder die Schätzung eines Grundstücks bzw. eines anderen beweglichen oder unbeweglichen Gutes. Hierzu wurden drei Schätzungen vorgenommen; eine jede von ein paar Männern, die zu diesem Zweck ausersehen wurden. Das Volk nannte sie die drei Schürzen (Schurzen). Hier zeigt sich, dass schon sehr früh Entscheidungen durch die Heranziehung von sog. durchschnittlichen Daten beeinflusst wurden. Auch In der *Abhandlung über die Buchhaltung 1494* von Luca Pacioli ist zu lesen: „So holte man ein Gutachten eines erfahrenen Schätzers ein oder im Zweifelsfalle von mehreren, von denen man dann den Durchschnitt nahm.“

8 Siehe auch den Beitrag von Kurt-R. Biermann und Margot Faak: G.W. Leibniz und die Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit bei J. de Witt. In: Nachrichtenblatt der deutschen Wissenschaft und Technik. Berlin Juni 1959.
9 In Keilschrifttexten ist bereits eine Regel für die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen enthalten.

Tabelle

über die Ordnung des Absterbens von 1000 Gebohrnen, in einem Lande wo jährlich 1000 gebohren werden, und 1000 wieder sterben.

Jahre A.	Staffel der Sterb-lichkeit. Es sterben jährlich. B.	Von 1000 Gebohrnen sind übrig und leben in jedem Jahre. C.	Summa aller Lebenden in jedem Jahre nebst denen die drunter sind. D.	Es stirbt jährlich Einer von E.
0	260	1000	1000	4
1	80	740	1740	9
2	40	660	2400	16
3	24	620	2620	25
4	12	596	2616	49
5	10	584	3200	58
6	10	574	3770	57
7	10	564	4334	56
8	8	554	4888	69
9	6	546	5434	91
10	5	540	5974	108

Jah=

Abb. 8 Abschrift aus: Kritter, Johann August(in): Oeconomisch-politische Auflösung der wichtigsten Fragen, welche itzo wegen der Einrichtung dauerhafter Witwen-Cassen aufgeworfen werden: nach den Süßmilchischen Grundsätzen. Göttingen 1768.

II.

Untersuchung des Unterscheides der Sterblichkeit der Männer und der Frauen von gleichen Alter.

Diese Untersuchung ist vor alle diejenigen wichtig, welche darauf bedacht sind, dauerhafte Wittwenpflegschaften zu errichten oder auch die Dauer einer Gesellschafft von dieser Art, worin sie selber stehen, zu untersuchen. Denn es kommt hiebey lediglich auf die Frage an: Wie viele werden von 100, oder 1000 Männern, die zum Beyspiel in ihrem 40ten Jahre in die Gesellschaft getreten, alle Jahre sterben, und wie viele von ihren hinterlassenen Frauen werden nach Maaßgabe ihrer jüngern

Jah=

Abb. 9 Abschrift aus: Kritter, J.A.: Untersuchung des Unterscheides der Sterblichkeit der Männer und der Frauen von gleichem Alter. In: Göttingisches Magazin der Wissenschaften und Litteratur 2. Jg.,1.St., 1781.

Die Langlebigkeit der Frauen entdeckte Kritter

Der Konstrukteur der ersten bayerischen „Mortalitaets-Tafel" (Sterbetafel oder Überlebenden-Tafel; im Englischen Live table genannt), Dismas A. Gebhart, äußerte sich in seinem 1832 erschienen Werk *Ueber Wittwen- und Waisen-Pensions-Anstalten* anerkennend über die Schrift *Oeconomisch-politische Auflösung der wichtigsten Fragen, welche itzo wegen der Einrichtung dauerhafter Witwen-Cassen aufgeworfen werden ...* von Johann A. Kritter aus dem Jahr 1768. Kritter benutzte bei dieser Arbeit die „Süßmilchischen Sterbe-Tabellen" (s. Abb. 8).

Gebhard erwähnte auch, dass Leonhard Euler die Berechnungen von Kritter in algebraische Formen brachte (Neues Hamburgisches Magazin, 8. Bd., 43. St., 1770). Außerdem hob Gebhard hervor, dass Kritter als Erster auf die Längerlebigkeit der Frauen hinwies (siehe Abb. 9). Diese Entdeckung von Kritter war für die Begründung der Pensions-Anstalten und deren Existenzfähigkeit wesentlich.

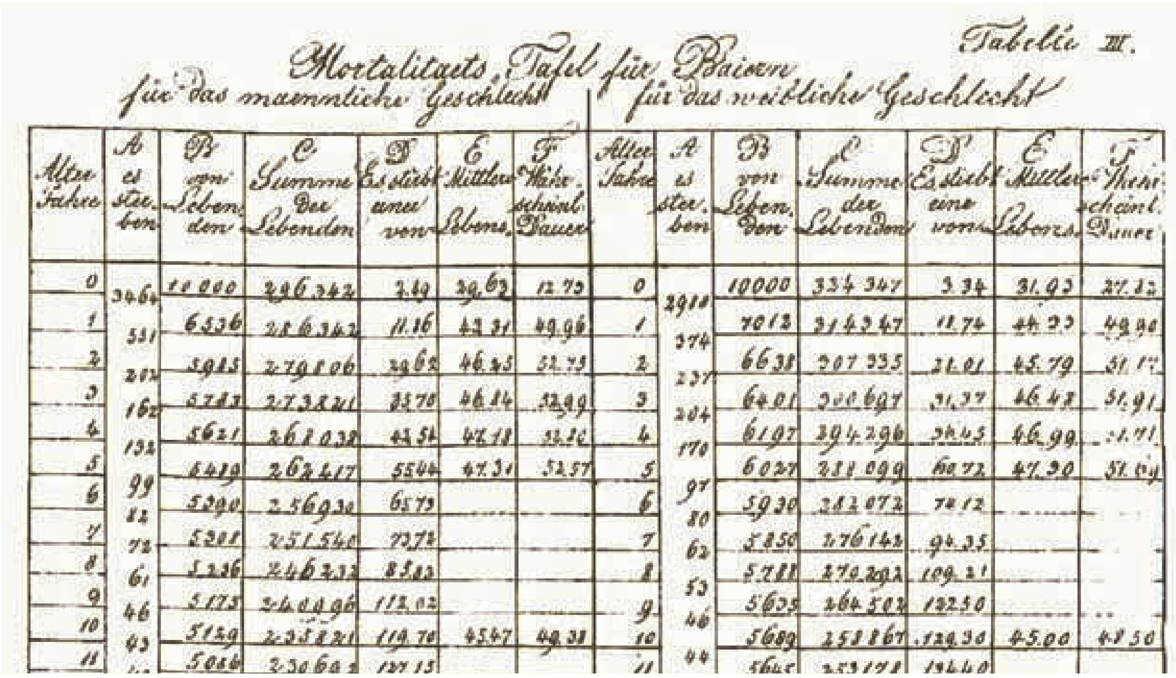
Erste bayerische Sterbetafel um 1825

Über die erste bayerische Sterbetafel („Mortalitaets-Tafel") wurde in der Zeitschrift „Bayern in Zahlen" 5/2002 ausführlich berichtet (s. Abb. 10). Sie wurde von Dismas A. Gebhard (1784 - 1846) erstellt und um 1826 veröffentlicht. Gebhard wurde vom Finanzministerium mit den Arbeiten zum Entwurf einer Satzung und den Vorbereitungsarbeiten für die Errichtung einer Pensionsanstalt für Witwen und Waisen beauftragt (Kurt Winschiers). In der Vorrede zum ersten Teil der Publikation *Ueber Wittwen- und Waisen-Pensions-Anstalten* von Gebhard aus dem Jahr 1832 heißt es: „König Maximilian Joseph von Bayern hatte bald nach dem Antritte seiner Regierung (1799) zweien Mathematikern den Auftrag ertheilen lassen, Vorschläge zur Begründung einer Wittwen- und Waisen-Versorgungs-Anstalt auszuarbeiten." Für ein solches Projekt bedarf es einer Sterbetafel. Dass die Publikation der ersten Sterbetafel so lange auf sich warten ließ, mag an den damaligen politischen Verhältnissen gelegen haben. Kurfürst Max IV Joseph übernahm die Regierung in einer schwierigen Zeit (verarmter Staat und die Schicksalsfrage: mit Habsburg oder Frankreich?).

Gebhards Werk vom Jahr 1832 enthält übrigens im Anhang des zweiten Teils die „Mortalitaets-Tafel". Dabei fällt die Schreibweise y statt i für Bayern auf. Die Tafel stützt sich auf die Jahre 1817/18 bis 1824/25.

Älteste vergleichbare Sterbetafel

Im Jahr 1887 wurde eine erste allgemeine deutsche Sterbetafel (Volkssterbetafel) veröffentlicht, welche von Karl Becker aus den Sterblichkeitsverhältnissen des Jahrzehnts 1871/72 bis



Mortalitaets-Tafel für Baiern — Tabelle III.

für das maennliche Geschlecht: Alter Jahre	A es sterben	B von Lebenden	C Summe der Lebenden	D Es stirbt einer von	E Mittlere Lebens	F Wahrscheinl. Dauer	für das weibliche Geschlecht: Alter Jahre	A es sterben	B von Lebenden	C Summe der Lebenden	D Es stirbt eine von	E Mittlere Lebens	F Wahrscheinl. Dauer
0	3464	10000	246342	2.69	39.62	12.75	0	2918	10000	334347	3.34	31.93	27.32
1	551	6536	286342	11.16	42.31	49.96	1	374	7012	314347	11.74	44.23	49.90
2	202	5985	279806	29.62	46.45	52.75	2	237	6638	307335	21.01	45.79	51.1[illegible]
3	162	5783	273821	35.70	46.14	52.99	3	204	6401	300697	31.37	46.48	51.91
4	132	5621	268038	42.56	47.18	[illegible]	4	170	6197	294296	36.45	46.99	[illegible]
5	99	5489	262417	55.44	47.31	52.57	5	97	6027	288099	60.72	47.30	51.[illegible]
6	82	5390	256930	65.73			6	80	5930	282072	74.12		
7	72	5308	251540	73.72			7	62	5850	276142	94.35		
8	61	5236	246232	85.83			8	53	5788	270292	109.21		
9	46	5175	240996	112.02			9	46	5635	264504	122.50		
10	43	5129	235821	119.70	45.47	49.38	10	44	5689	258867	129.30	45.00	48.50
11	[illegible]	5086	230692	127.15			11		5645	253178	134.40		

Abb. 10 Erste „Mortalitaets-Tafel für Baiern“ (ca. 1826). Erstellt von Dismas A. Gebhard (1784 - 1846).

1880/81 berechnet worden war, siehe *Monatshefte zur Statistik des Deutschen Reichs*.[10] Sie war zugleich die erste, welche nach der vom internationalen statistischen Kongreß empfohlenen Methode erstellt worden ist. Der Kongreß fand 1876 in Budapest statt. Diese Tafel ist die älteste Überlebendentafel, die für Vergleiche herangezogen werden kann. In der genannten Publikation finden sich auch Sterbetafeln für ausgewählte Länder.

Für Bayern ist die Sterbetafel 1891/1900 die älteste Tafel, die für Vergleiche zur Verfügung steht, sie wurde nach der Sterbejahrmethode nach Raths angefertigt (Deutsche Sterbetafeln für das Jahrzehnt 1891 - 1900).

Die Lebensabschnitte in der Kunst

In der Kunst spielten die menschlichen Lebensabschnitte schon sehr früh eine Rolle. Die bildliche Darstellung des Lebensalters kam in der byzantinischen Kunst des achten Jahrhunderts auf, sie unterschied drei Stufen des Lebens. Im Mittelalter war die Siebenteilung häufig. Auch die Neun- und Zehnteilung tritt in Erscheinung mit der Annahme von 90 oder 100 Jahren als erreichbarem Höchstalter (J. Breu, T. Stimmer).

Nach Zeichnungen von Tobias Stimmer (1539 - 1584) fertigte der Monogrammist MB im 16. Jahrhundert Holzschnitte zu den Lebensaltern des Menschen an. Einen davon weist Abb. 11 aus. Der Schweizer Tobias Stimmer war Maler, Graphiker und Komödiendichter.

Abb. 11 Aus: Beham, Hans Sebald: Die Planeten: sieben Orginalholzschnitte. Beigefügt: Die Lebensalter des Menschen ... Berlin 1907.

Um 1818/20 schuf Eberhard v. Wächter (1762 - 1852) eine zeitlose Darstellung der Lebensabschnitte. Gemeint ist sein Gemälde *Der Kahn des Lebens*, das in der Staatsgalerie Stuttgart aufbewahrt wird (s. Abb. 12).

10 Siehe auch: Die gebräuchlichsten Sterblichkeitstafeln der im Deutschen Reiche arbeitenden Lebensversicherungsunternehmungen: Dem V. Internat. Kongreß für Versicherungs-Wissenschaft gewidmet. Deutscher Verein für Versicherungs-Wissenschaft Heft XI. Berlin 1906.

Abb. 12 Eberhard v. Wächter: Der Kahn des Lebens (1818/1820). Aus: Kunst im Detail. Vom Klassizismus bis zum Biedermeier / Fotos: Peter Windstoßer. Herausgegeben von der Landesbank Stuttgart Girozentrale. Stuttgart 1987.

„Der Nachen vereint hier eine Gruppe von neun antikisch gewandeten Personen verschiedener Altersstufen: vier Kinder, ein junges, sich umarmendes Paar, die reife Mutter, die im Blickkontakt steht mit dem Mann am Ruder, und einen einsamen Alten im Bug, der sich auf seinen Stock stützt." (*Kunst im Detail: Vom Klassizismus bis zum Biedermeier.* Hrsg. Landesbank Stuttgart Girozentrale. Stuttgart 1987, Fotos Peter Windstoßer). Ob der Künstler von der griechischen Mythologie angeregt wurde? Erinnert sei an den Fährmann Charon. Auf den Fährmann Charon trifft man im 6. Buch der *Aeneis* von Vergil (70 - 19 v. Chr.): „Hier die Gewässer und Ströme bewacht als grausiger Fährmann Charon, (...), fährt im dunklen Kahn die Toten hinüber."

Im alten Ägypten diente ein Boot für die symbolische Reise in eine unbekannte Welt. Heren, ein Boot, womit die Seele des Pharao zur letzten Ruhestätte gebracht wurde (siehe das Bild in *Von Adam bis Daniel* von Gaalyahu Cornfeld. Würzburg 1962, S. 116).

Mittlere Lebensspanne im Mittelalter

Zahlreiche Entscheidungen werden durch die Hinzuziehung von sogenannten durchschnittlichen Daten beeinflusst.

Ob Aussagen zur durchschnittlichen Lebenserwartung in früheren Jahrhunderten ein zutreffendes Bild zeichnen, darf durchaus in Frage gestellt werden. Eine U-förmige Verteilung der Sterblichkeit war damals charakteristisch: Die Säuglingssterblichkeit war relativ hoch, dann sank die Sterbewahrscheinlichkeit und nahm im höheren Alter wieder stark zu. Die mittlere Lebenserwartung kann sich durch einen Rückgang der Säuglingssterblichkeit oder durch einen Rückgang der Sterblichkeit in den höheren Altersjahren erhöhen.

Was bedeutet durchschnittlich eigentlich? Oskar Anderson schrieb in seinem Werk *Probleme der statistischen Methodenlehre:* „Es muss aber darauf hingewiesen werden, dass, wenn im gewöhnlichen Wortgebrauch man von etwas als ‚im Durchschnitt' spricht, noch durchaus kein arithmetisches Mittel gemeint zu sein braucht."

Am Rande: Die Mittelwerte werden unterschieden in lagetypische und rechentypische Mittelwerte. Zu den ersteren gehören der Zentralwert und der häufigste Wert (Modus). Zu den rechentypischen Mittelwerten zählen das arithmetische und das geometrische Mittel. Zum mittleren Sterbealter in der heutigen Zeit: Das mittlere Sterbealter ergibt sich, wenn man das Alter x in einer Sterbetafel um den zugehörigen Wert der mittleren Lebenserwartung erhöht. So lässt sich die Frage beantworten, „wie alt“ eine Person im Durchschnitt wird.

Unterlagen der Standes- und Pfarrämter (Matrikelführung)

In Bayern wurden Standesämter 1876 errichtet. Alle Geburten, Eheschließungen und Sterbefälle werden dort in Registern eingetragen.

Seit dem 16. Jahrhundert werden bei den Pfarrämtern Kirchenbücher oder Pfarrmatrikeln über alle vorkommenden Taufen, Trauungen und Sterbefälle geführt. Schon 1524 wurden bei den evangelischen Nürnberger Pfarreien St. Sebald und St. Lorenz Ehebücher eingeführt, 1533 wurde dort die Führung von Taufmatrikeln angeordnet.

Innerhalb der katholischen Kirche wurde zunächst für die katholischen Pfarreien der Diözese Augsburg die Führung von Tauf-, Trau-, Toten- und Kommunikantenlisten durch die Augsburger Synode von 1548 angeordnet, vgl. Sonderdruck aus den *Mitteilungen für die Archivpflege in Bayern* 6. Jahrg. 1960, Heft 1/2. Das Konzil von Trient (1545 - 1563) ordnete die Matrikelführung an, jedoch nur auf Tauf- und Ehebuch (sess. XXIV, c. 1 und 2), vgl. Swoboda, Heinrich: *Das Konzil von Trient.* Wien 1912, S. 102. Für die Führung von Sterberegistern gelten hierzulande die jeweiligen Diözesanritualien. Beispielhaft sei das *Rituale Trevirense* von 1767 erwähnt. Danach muss das Begräbnis im „Totenbuch“ der Pfarrei eingetragen werden. Dies ergab eine Auskunft von Herrn Prof. Dr. Andreas Heinz (Deutsches Liturgisches Institut).

Vom Archiv des Erzbistums München und Freising stammen folgende Angaben: „1569 wurde durch die Salzburger Kirchenprovinz (zu der das Bistum Freising damals gehörte) auch die Führung eines Verzeichnisses mit Abgängen durch Wegzug und Tod angeordnet. Das *Freisinger Pastorale* von 1625, das *Freisinger Rituale* aus dem Jahr 1673 sowie das *Rituale Romanum* von 1721 schrieben ebenfalls die Führung von Sterbebüchern/Beerdigungsbüchern vor.“

Leider gingen im Dreißigjährigen Krieg sehr viele Kirchenbücher verloren.

Lebenserwartung und Zunahme der Weltbevölkerung

Welchen Einfluss hat die längere Lebensdauer auf den Anstieg der Weltbevölkerung? Dies soll angesprochen, hier aber nicht weiter behandelt werden. Nachfolgend geschätzte Daten zur Entwicklung der Weltbevölkerung für ausgewählte Jahre, vgl. Krengel Rolf: *Die Weltbevölkerung von den Anfängen des anatomisch modernen Menschen bis zu den Problemen seiner Überlebensfähigkeit im 21. Jahrhundert*. Berlin 1994. Beiträge zur Strukturforschung Heft 148, S. 26.

Entwicklung der Weltbevölkerung in der Neuzeit von Jahrhundert zu Jahrhundert

Jahr	Bevölkerung in Millionen
1500	450
1600	510
1700	610
1800	905
1900	1 665

Vormalige Ernährungsgewohnheiten

Ein Kernproblem der menschlichen Existenz ist die Versorgung mit Nahrung. Sie nimmt zweifellos Einfluss auf die Lebenserwartung. Über die Ernährungsgewohnheiten in früherer Zeit berichtete Margrit Irniger *Die Landwirtschaft und ihre Pflanzen in vorindustrieller Zeit.* Danach blieben bis zur Einführung der Kartoffeln in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts Getreidebrei, Brot und Mehlspeisen die Grundnahrungsmittel der ländlich-bäuerlichen wie der städtischen Bevölkerung. Bekanntlich förderte Friedrich der Große (reg. 1740 - 1786) den Anbau von Kartoffeln. Erinnert sei an den Erlass seines „Kartoffelbefehl“ im Jahr 1756. Nach Margrit Irniger trug der Berner Landvogt Samuel Engel (1702 - 1784) mit seiner Schrift über den Kartoffelanbau aus dem Jahr 1773 wesentlich zur Förderung und Kenntnis dieser Erdfrüchte bei. In Bayern wurde der Kartoffel- und Kleeanbau durch Maximilian III. Joseph (reg. 1745 - 1777) gefördert, er war der letzte Kurfürst aus der bayerischen Linie der Wittelsbacher.

Mit der Entdeckung des Zuckers in der Runkelrübe im Jahr 1747 schuf Andreas Sigismund Marggraf (1709 - 1782) die Grundlage für die von seinem Schüler Franz Carl Achard begründete Zuckerindustrie in Deutschland. Kochsalz war bis zur ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts in Europa ein kostbares Gut. Erinnert sei an Henri Nestlé, der 1867 die erste Säuglingsnahrung (Kindermehl) entwickelt hatte. Sein Kindermehl entsprach einem dringenden Bedarf, da in Europa immer noch eine sehr hohe Kindersterblichkeit herrschte. Er legte den Grundstein zu dem, was heute unter dem Begriff „Nutrition“ verstanden wird.

Fortschritte in der Medizin

Die Ursachen für den Anstieg der mittleren Lebenserwartung werden unterschiedlich gedeutet. Die Fortschritte in der Medizin haben dabei eine gewisse Rolle gespielt. Die naturwissenschaftliche Epoche der Medizin begann mit Theophrastus Bombastus von Hohenheim, genannt Paracelsus (um 1494 - 1541) und Andreas Vesal (1514 - 1564). Ambroise Paré (1510 - 1590) war führend in der Chirurgie der Renaissance. Die wissenschaftliche Zahnheilkunde begann im 18. Jahrhundert mit Pierre Fauchards Werk *Le chirugien dentiste* (1728, deutschsprachig 1733). Ignaz Philipp Semmelweis (1818 - 1865) erkannte, dass das Wochenbettfieber durch Kontaktinfektion übertragen wird und durch Reinlichkeit (Desinfektion der Hände und Instrumente) zu verhüten ist. Dafür erhielt er den Ehrentitel „Retter der Mütter“. Die Medizin wird in der Zukunft ein Gebiet sein, das erheblich von der Nanotechnologie – eine neue Schlüsseltechnologie – beeinflusst werden wird.

Wie hoch war die Anzahl meiner Ahnen? – keine reine Rechenaufgabe

Zu guter Letzt noch folgende Aufgabe: Wenn auf ein Jahrhundert etwa drei Generationen entfallen, wie groß war schätzungsweise die Anzahl der Ahnen einer Person am Beginn unserer Zeitrechnung?

Die Lösung: Vor 100 Jahren gab es 8 Ahnen, vor 200 Jahren also $8^2 = 64$ Ahnen ... und vor 2000 Jahren also $8^{20} = 2^{60}$ Ahnen. Diese Größe erreicht gewaltige Ausmaße (eine 19stellige Zahl).

Diese „Rechenaufgabe“ kann als Beispiel für die Frage dienen, was das Schätzen vom Rechnen unterscheidet? Dazu bemerkte Ernst Wagemann: „denn die Rechenkunst ist nur die Magd ihrer weit gebildeteren Herrin, der statistischen Schätzung, die andererseits ohne die Dienstleistung des Rechnens auch nicht auskommen könnte.“

Als Beispiel für die Aussage von Wagemann könnte auch manche Berechnung der Lebenserwartung in tiefer regionaler Gliederung angeführt werden. In bestimmten Altersjahren liegen oft niedrige Besetzungszahlen vor. Es ist daher zu beachten, dass Zufallsschwankungen eine Rolle spielen können und einzelne Messergebnisse Ungenauigkeiten beinhalten.

Zur Konstruktion einer heutigen Sterbetafel

Wie bereits erwähnt, benötigt man für die angemessene Bewertung von Leibrenten unter anderem eine Sterbetafel. Sie enthält neben den einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten die Absterbeordnung (Anzahl der Überlebenden) sowie die mittlere Lebenserwartung in jedem Alter. So stellen Sterbetafeln oder Überlebendentafeln eine wichtige Entscheidungsgrundlage in Politik und Wirtschaft dar.

Bei Sterbetafeln geht man von einer Längsschnittbetrachtung oder von einer Querschnittbetrachtung aus. Aus praktischen Gründen bevorzugt man in der Statistik die Querschnitt- oder Periodensterbetafel (siehe hierzu „Bayern in Zahlen“ 8/2001, S. 302).

Nach Vorliegen der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten stellt sich die Frage nach deren Glättung. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts hat man dies zum Teil noch abgelehnt. Später ist man davon ausgegangen, dass die Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten zweckmäßig und notwendig ist. Nach Möglichkeit soll der Zufall ausgeschaltet werden. Die Rechenkapazitäten reichten ursprünglich nur für bestimmte Altersabschnitte und so mussten bis zu drei verschiedene Glättungsverfahren angewandt werden. Diese Vorgehensweise musste auch dann noch beibehalten werden, als schon die Spline-Funktionen bekannt waren. Erst durch die bahnbrechende Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen wurde das Spline-Verfahren wegen des enormen Rechenaufwands durchführbar. So gelang es, die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten für die Altersjahre 1 bis etwa 100 mit *einer* Methode zu glätten. Ein Traum, der in der Mitte des 20. Jahrhunderts aufkam, hat sich so erfüllt. Splinefunktionen – ein verhältnismäßig junges Gebiet – sind hilfreich, wenn für eine anzupassende Kurve Hinweise für ein mögliches Modell fehlen. Bei der Erstellung der bayerischen Sterbetafeln 1986/88 und 1996/98 wurden bereits Spline-Funktionen eingesetzt. Siehe hierzu die Hefte 9/1991 und 8/2001 sowie 5/2002 der Zeitschrift „Bayern in Zahlen“.

Als Standardverfahren verwendet man zur Bestimmung der Kurvenparameter häufig die *Methode der kleinsten Quadrate.* Die Bedeutung dieser Methode zum Ausgleich von Messfehlern wurde von Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) klar erkannt. So gelang es ihm mit dieser Methode, mit den wenigen Beobachtungen des Astronomen Piazzi die Ephemeride des kleinen Planeten Ceres zu berechnen. Sie ist auf Zeitreihen der Sozialstatistik beschränkt anwendbar.

Literaturnachweis

Aristoteles: Politik. Nach der Übersetzung von Franz Susemihl bearb. mit Numerierung, Gliederungen und Anm. Herausgegeben von Nelly Tsouyopoulos und Ernesto Grassi. Reinbeck b. Hamburg 1965.

Antike Heilkunst. Hrsg. von Jutta Kollesch und Diethard Nickel. Stuttgart 1994.

Bernoulli, Jakob: Die Werke von Jakob Bernoulli. Herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band 3 (Wahrscheinlichkeitsrechnung). Basel 1975.

Braun, Heinrich: Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik. Berlin 1963.

Buchenwald, Wilhelm: Die Aphorismen des Hippocrates. Nördlingen 1840.

Czuber, Emanuel: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Leipzig 1903.

Deutsche Sterbetafeln für das Jahrzehnt 1891 bis 1900. Bearb. im Kaiserlichen Statistischen Amte. Berlin 1910 (=Statistik des Deutschen Reichs. Bd. 200).

Dulckeit, Gerhard: Römische Rechtsgeschichte. München 1957.

Gebhard, Dismas A.: Ueber Wittwen- und Waisen-Pensions-Anstalten. Bd. 2. München 1832.

Halley, Edmond: An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives. In: Philosophical Transactions, 17 (Numb. 196). London 1693. p. 596 - 610.

Halley, Edmond: Some further Considerations on the Breslaw Bills of Mortality. In: Philosophical Transactions, 17 (Numb. 198). London 1693. p. 654 - 656.

Hartitzsch, Adolph K. von: Das Römische Privatrecht in ausführlicher tabellarischer Darstellung. Leipzig 1831.

Hirtz, Helmut: Bayerische Sterbetafel 1996/98. In: Bayern in Zahlen. Zeitschrift des Bayerischen Landesamts für Statistik und Datenverarbeitung. 132. (55.) Jahrgang. Heft 8/2001. S. 289 ff.

Hirtz, Helmut: Bayerische Sterbetafeln – ein methodisch-historischer Streifzug. In: Bayern in Zahlen. Zeitschrift des Bayerischen Landesamts für Statistik und Datenverarbeitung. 133. (56.) Jahrgang. Heft 5/2002. S. 193 ff.

Huber, Friedrich: Daniel Bernoulli (1700 - 1782) als Physiologe und Statistiker. Basel 1958.

Irniger, Margrit: Die Landwirtschaft und ihre Pflanzen in vorindustrieller Zeit. In: Gen-Welten Ernährung: [Ausstellung Alimentarium, Vevey/Schweiz, 27.3.1998 – 10.1.1999] / Fondation Alimentarium, Musée de L'Alimentation. Hrsg. von Esther V. Schärer-Züblin. Vevey 1998.

Jursa, Michael: Die Babylonier. München 2004.

Knobloch, Eberhard: Die Schriften im Überblick. In: Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik von Gottfried Wilhelm Leibniz. Berlin 2000.

Leibniz, Gottfried Wilhelm: Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik. Hrsg. von Eberhard Knobloch und J.-Matthias Graf von der Schulenburg. Mit Kommentaren von Eberhard Knobloch, Ivo Schneider, Edgar Neuburger, Walter Karten und Klaus Luig. Berlin 2000.

Marquardt, Joachim: Römische Staatsverwaltung. Bd 2. Darmstadt 1957 (Nachdruck der 2. Aufl. von 1881).

Mitteilungen für die Archivpflege in Bayern / Sonderheft / hrsg. von der Generaldirektion der Staatlichen Archive Bayerns. Sonderheft Kallmünz: Laßleben. Kallmünz; 6. Jahrg. 1960, Heft 1/2.

Monatshefte zur Statistik des Deutschen Reichs. Hrsg. vom Kaiserlichen Statistischen Amt. Jg. 1887, Heft 11. S. 1 - 65.

Ogris, Werner: Der mittelalterliche Leibrentenvertrag. Wien München 1961.

Pacioli, Luca: Abhandlung über die Buchhaltung 1494. Nach dem italienischen Original von 1494 ins Deutsche übersetzt und mit einer Einleitung über die italienische Buchhaltung im 14. und 15. Jahrhundert und Paciolis Leben und Werk versehen von Balduin Penndorf. Stuttgart 1933.

Plato: Timaios. Hrsg., übers., mit einer Einl. und mit Anm. versehen von Hans Günter Zekl. Hamburg 1992.

Rein, Wilhelm: Das Römische Privatrecht und der Civilprozeß bis in das erste Jahrhundert der Kaiserherrschaft. Leipzig 1836.

Suetonius Tranquillus, Gaius: Sämtliche erhaltenen Werke. Neu bearb. von Franz Schön und Gerhard Waldherr. Essen 1987.

Swoboda Heinrich: Das Konzil von Trient. Wien 1912, S.102.

Ulpianus, Domitius: Digesta Iustiniani Augusti/recognovit adsumptio in operis societatem Paulo Kruegero Th. Mommsen. Berolini MCMLXIII (1963), Vol. II.

Winschiers, Kurt: 500 Jahre Vermessung und Karte in Bayern. Ein Überblick in 60 biographischen Skizzen. Deutscher Verein für Vermessungswesen. 34. Jahrgang. Sonderheft 2/1982, S. 71.

Bemerkenswertes zu Geldgeschäften und die Anfänge des Versicherungswesens

Geld – ein rätselhaftes Wesen. Wie auch immer, es ist stets ein aktuelles Thema. Finanzangelegenheiten gehörten schon immer zum Alltag des menschlichen Lebens. „Mangelt im Beutel die Barschaft, – mangelt's an Jeglichem" heißt es in *Gargantua und Pantagruel* (1546) von François Rabelais. Von Claus Schrempf stammt der Satz: „Geld in seiner wirtschaftlichen Herrenrolle ist eine Handelsware und hat als solche einen Preis, welcher Zins genannt wird." Zu den großen Errungenschaften unserer Zivilisation zählt der Zugewinn an Langlebigkeit der Menschen (s.u.). Die längere Lebenszeit der Menschen hat natürlich ihren Preis und so kommt dem Kapitalbedarf im Alter ein bedeutender Stellenwert zu. Zum Thema Geld im Alter äußerte sich der griechische Philosoph Platon (427 - 347 v. Chr.) mit dem Ratschlag: „Besser sterbend den Gegnern etwas hinterlassen als lebend die Freunde anbetteln." Von der Steigerung der mittleren Lebenserwartung dürften die Finanzmärkte nicht unbeeinflusst bleiben. Die Vorsorge für das Alter wird vielschichtiger werden. So sollen sogar die kontrovers eingeschätzten Hedgefonds Eingang in die Altersvorsorge finden. Fatale Folgen hatte ein Finanzprodukt eines Genfer Bankiers: Er entwickelte im 18. Jh. eine Leibrente, die vom französischen Staat so lange gezahlt werden sollte, bis das letzte von 30 Mädchen sterben würde.

Vorbemerkungen

Die gebräuchlichste Form der privaten Rentenversicherung ist die Leibrente (Lebensrente), die bis zum Lebensende des Versicherten bezahlt wird. Lebenserwartung und Leibrente - eine Alliteration?

Kaufgeschäfte auf Leibrentenbasis können Bestandteil einer Vorsorge für das Alter sein. Häufig werden solche Kaufgeschäfte mit Immobilien in Verbindung gebracht. So wird ein Hauskauf auf Leibrente gleichgesetzt mit „Immobilienerwerb auf Rentenbasis". Ein Spezialgeschäft in Leibrenten pflegen manche Versicherer etwa so zu gestalten: Einer Versicherung wird ein Vermögen als Einmalprämie anvertraut. Dafür verpflichtet sich diese für einen zu vereinbarenden Zeitraum eine regelmäßige „Rente" zu zahlen. Eine solide Finanzkraft der Lebensversicherer ist dabei unabdingbar. Zum Geschäft einer Versicherung gehört der Umgang mit Risiko. Für eine Lebensversicherung stellen sich dabei vor allem folgende Fragen: Liegen den Lebensversicherungen die passenden Sterbetafeln zugrunde und wie entwickeln sich die Kapitalmärkte. In den letzten Jahren waren die Vorsorgeeinrichtungen durch einbrechende Aktienmärkte und sinkende Zinsen bei festen Leistungsversprechen harten Bewährungsproben ausgesetzt. Letztlich ist die Leibrente eine Wette zwischen Anleger und Versicherer. Im Wettbewerb mit der Leibrente stehen die festverzinslichen Wertpapiere.

Die Historie der Leibrente stand unter dem Einfluss verschiedener Entwicklungen. In einem Streifzug sollen die vielfältigen Wechselbeziehungen mit dem zeitgeschichtlichen Umfeld dargestellt werden. Skizziert werden folgende Bereiche: Die Leibrente im Wandel der Zeit, die Vorläufer des Versicherungsgedankens und neben den Anfängen des Bankwesens außerdem Innovationen im Finanzwesen.

Von Leibrenten berichtete schon der jüdische Geschichtsschreiber Flavius Josephus (geb. 37 n. Chr.). Danach bedachte Herodes in einem früheren Testament seine eigenen Söhne und Enkel mit Legaten, Leibrenten und Grundbesitz (*Jüdische Altertümer.* 17. Buch, 6. Kapitel). Genannt sei auch Albrecht I., Herzog von Bayern-Straubing, der als Graf von Holland der Stadt Amsterdam 1402 das Recht verlieh, Leibrenten zu vergeben.

Aus dem mittelalterlichen Leibrentengeschäft entwickelte sich die Lebensversicherung. Fundierte Untersuchungen über die richtige Bewertung von Leibrenten begannen im 17. Jahrhundert. Begünstigt wurde dies durch den Aufschwung der abendländischen Mathematik im 15./16. Jahrhundert.

In seinem Kommentar *Einige Aspekte der Schriften aus der Sicht der Versicherungsbetriebslehre* zur Herausgabe der

Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) im Jahr 2000 schrieb Walter Karten: „Leibrenten, Tontinen und ihre Abwandlungen waren die wichtigsten Kapitalbeschaffungsinstrumente der damaligen Zeit. Der Versicherungsbedarf gegen das Altersversorgungsrisiko des langen Lebens trat erst sehr viel später als Motiv in den Vordergrund.“ Edgar Neuburger bemerkte in seinem Kommentar *Die Schriften aus Sicht der Versicherungsmathematik* zu dem eben genannten Werk von Leibniz: „Im Mittelpunkt der versicherungsmathematischen Abhandlungen von Leibniz steht das Problem der Bewertung von Leibrenten …“. Von Gottfried Wilhelm Leibniz ist der folgende Satz aus dem Jahr 1683 überliefert: „Wie hoch die Leibrente sein müsste, kann aus den voraussichtlichen Jahren des Rest-Lebens des Menschen abgeschätzt werden.“

Die noch heute übliche Berechnung der Versicherungsbarwerte für Leibrenten geht auf Nikolaus Tetens (1736 - 1807) zurück, der in Deutschland 1785 zum ersten Mal solche Rechenergebnisse veröffentlichte, um Leibrenten angemessen zu bewerten. Bemerkenswert ist, dass zweihundert Jahre davor, also 1585, schon von Simon Stevin (1548 - 1620) diskontierte Zahlen veröffentlicht wurden (*La Pratique d’Artihmetique.* In: *L'Arithmetique*).

Die ersten auf versicherungsmathematischer Basis aufgebauten Lebensversicherungs-Unternehmen kamen in England zu Beginn des 18. Jahrhunderts auf. Es ist bemerkenswert, dass die Lebensversicherung zu den ersten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Wirtschaftsleben zählt. Die Versicherer ließen das Alter und die Lebenserwartung in ihre Kalkulation einfließen.

In der Finanzmarkttheorie erhielt die Wahrscheinlichkeitstheorie durch Louis Bachelier (1870 - 1946) einen Platz. Er legte im Jahr 1900 seine *Théorie de la Spéculation* vor.

Mit den modernen Finanzmarkttheorien setzt sich das in 2005 erschienene Buch *Fraktale und Finanzen: Märkte zwischen Risiko, Rendite und Ruin* von Benoît B. Mandelbrot (geb. 1924) in Zusammenarbeit mit Richard L. Hudson kritisch auseinander. Ob man gegen die erratischen Schwankungen an den Finanzmärkten je gefeit sein wird?

Deutlicher Zugewinn an Lebensjahren erfordert ein Finanzpolster

Das herausragendste Ergebenis der bayerischen Sterbetafel 1996/98 war die Verdoppelung der mittleren Lebenserwartung beider Geschlechter in den letzten hundert Jahren (siehe „Bayern in Zahlen“ 8/2001, S. 297. bzw S. 30). Wenn auch damit einhergehend heute immer mehr Menschen ein hohes Alter erreichen, so veränderte sich die maximal zu erwartende Lebensdauer kaum.

Beachtenswert ist auch der folgende Vergleich: Die Aussicht einer 73-jährigen Frau, das Alter von 85,7 Jahren (bei einer Lebenserwartung von 12,7 Jahren) zu erreichen, beläuft sich noch auf eine Wahrscheinlichkeit von über 50% (Bayerische Sterbetafel 1996/98). Vor rund hundert Jahren lag diese Grenze schon bei einer 56 Jahre alten Frau. Damals konnte eine Frau in dem genannten Alter noch mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50% davon ausgehen, im Durchschnitt weitere 15,6 Jahre zu leben und so ein Alter von 71,6 Jahren zu erlangen. Bleibt noch anzumerken, dass nach der Überlebendentafel 1891/1900 die mittlere Lebenserwartung einer 73-jährigen Frau bei nur 6,3 Jahren lag. Diese Entwicklung lässt erkennen, welchen Stellenwert der Kapitalbedarf im Alter einnehmen wird.

Sterbekassen im Altertum – Vorläufer der Lebensversicherung

Vorläufer der Lebensversicherung finden sich in Gestalt von Sterbe- und Begräbniskassen schon im Altertum sowie bei den Innungen und Gilden des Mittelalters, zu denen später Witwen- und Waisenkassen traten.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), der sich auch mit Renten und Pensionen befasste, schrieb zur historischen Entwicklung von Leibrenten: „Renten, die man ad vitam oder pensiones vitales nennt, heißen bei den Deutschen Leibrenten, bei den Franzosen rentes à vie bzw. pension viagere; sie scheinen in der Antike unbekannt gewesen zu sein und wurden vor nicht gar so langer Zeit, ebenso wie die Kunst der kaufmännischen Rechnung, die öffentliche Bank, die Pfandleihhäuser und andere ähnliche kunstvolle Einrichtungen zuerst von den Italienern erfunden, danach jedoch von den Holländern vervollkommnet.“ Als zwei ausgezeichnete Männer nannte Leibniz „Johann de Wit, vor kurzem Pensionär von Holland und Westfriesland, und Jan Hudde, Amsterdamer Konsul“.

Leibrenten im Mittelalter

Die Berücksichtigung des Alters bei Leibrentengeschäften war nicht immer so selbstverständlich wie heutzutage. Werner Ogris berichtet über den Verkauf von Leibrenten durch den Rat von Nordhausen im Jahr 1350: An 40- bis 50-jährige Personen eine Mark Leibrente für 10 Mark Kapital und an 50- bis 60-jährige Personen eine Mark Leibrente für 8 Mark Kapital. Bei den über 60-jährigen stand der Verkauf im Belieben des Rates.

Neben Klöstern und Städten fand sich auch eine Reihe anderer Rentengeber, so zum Beispiel Spitäler, Kirchen, Zünfte und Landesherren. Sie nutzten die im Leibrentenvertrag liegenden kreditwirtschaftlichen Möglichkeiten. Die Landesherren suchten im Leibrentenverkauf auch eine Linderung ihrer Finanzmisere. Für die staatliche (territoriale) Finanzpolitik erschlossen sich im Leib- oder Ewigrentenverkauf billigere Geldquellen gegenüber der Aufnahme von Darlehen bei Juden oder Lombarden gegen hohe Zinsen.

Der Leibrentenvertrag als Form der öffentlichen Anleihe ist in neuester Zeit völlig bedeutungslos geworden (Ogris). Eine ausführliche Darstellung hierzu gibt Werner Ogris: *Der mittelalterliche Leibrentenvertrag.*

Montes – Ansammlung von Kapital

Im mittelalterlichen Italien gab es die Bezeichnung Montes (lat., Mehrzahl von mons ‚Berg') für Anstalten, die Geld ansammelten (Kapitalvereinigungen). Insbesondere nannte man so die Anstalten, welche seit dem 13. Jahrhundert zur Durchführung von öffentlichen Anleihen ins Leben gerufen wurden. Nach Meyers Konversations-Lexikon 1896: „Um das Zinsverbot zu umgehen, wurden die Gläubiger in Gesellschaften vereinigt, welchen bestimmte Rechte verliehen und gewisse Einnahmequellen zugewiesen wurden. Denselben wurde in einzelnen Fällen auch die Verwaltung solcher Einnahmequellen überlassen. So z.B. bei der berühmten *Casa di S. Giorgio* in Genua, einer Gesellschaft von Kapitalisten mit großartiger Verwaltung. Die Anteile an diesen Kapitalansammlungen, die durch Umschreibungen in den Büchern der Gesellschaften übertragbar und unsern Aktien ähnlich waren, hießen *Loca montium*. Die Renten, welche solche Anteile gewährten, waren meist dauernde, bisweilen auch nur bis zum Tode laufende Leibrenten (*M. vacabiles*). Einige dieser Montes, so die oben erwähnte *Casa di S. Giorgio*, haben auch Bankgeschäfte betrieben. Die M. pietatis (ital. Monti di pietà, franz. Monts-depiété, ‚Berge der Frömmigkeit') hatten im Gegensatz zu den M. profani den Zweck, mit Verzichtleistung auf Gewinn die wucherische Ausbeutung der Notlage zu verhüten. Das Kapital derselben wurde durch milde Zuwendungen beschafft. Sie gaben Darlehen gegen Pfänder und eine Vergütung, die zwar nur dazu bestimmt war, die Kosten zu decken, aber infolge teurer Verwaltung doch oft einen hohen Zins darstellte. Die erste Anstalt wurde 1462 in Perugia von dem Franziskanermönch Barnaba gegründet; … . Von Italien verbreiteten sich dieselben insbes. nach Frankreich, weniger nach Deutschland, wo, wie es scheint, das erste nach italienischem Muster eingerichtete Leihhaus erst 1591 in Augsburg errichtet wurde. (…)"

Leibniz über die Einrichtung der Pfandhäuser

Gottfried Wilhelm Leibniz bemerkt zu Pfandleihhäusern:
„Der Name >Mont< (Berg) scheint aus dem Überfluß des Geldes hergeleitet zu sein, das jeder für sich aufgefordert ist, dort hinzutragen und anzuhäufen. Und man nennt sie „Monts de Piété" (Berge der Frömmigkeit), weil ihr Ziel die Abschaffung des Wuchers ist.
Definition: Die „Monts de Piété" sind öffentliche Banken zur Pfandleihe ohne anderen Gewinn noch Zins über den Grundzinssatz hinaus, als nötig sein wird zur Schadloserhaltung des „Mont" und zur Deckung der Unterhaltskosten.
Einteilung: Es gibt drei Arten davon: die erste, zu der die gehören, welche auf fromme und kostenlose Schenkungen gegründet sind, die zweite, deren Grundkapital aus Leihgeldern und Rentenverschreibungen besteht, und die dritte, die sich aus beiden zusammensetzt."

Die Anfänge einer entwickelten kaufmännischen Rechnung gehen auf die Italiener zurück. Viele Begriffe aus der Finanzwelt sind noch heute gebräuchlich, wie zum Beispiel: Bankrott [banca rotta ‚zerbrochene Bank'], Disagio, Diskont, Giro, Konto, Kredit, Lombardgeschäfte, Saldo, Skonto, Valuta. Auch die doppelte Buchführung und der Wechsel (Tratte) sind italienischer Herkunft. Um 1500 galt Venedig als die Ausbildungsstätte der süddeutschen jungen Kaufleute. Der spätere Hauptbuchhalter der Fugger, Matthäus Schwarz, war in seiner Jugend nach Italien gekommen, um die Buchhaltung zu erlernen. Heute heißt es, dass Englisch die Sprache der Finanzbranche ist. Sieht man sich dort etwas um, so findet man auch einiges an Griechisch, meistens in Form von Buchstaben (Greek Letters), wie z.B. Beta, Delta, Gamma, Theta.

Tontine: eine vom Lebensalter abhängige Einrichtung

Eine mit der Dauer eines menschlichen Lebens verbundene Einrichtung war die Tontine. Sie trat in sehr unterschiedlichen Formen in Erscheinung. Erwähnt werden sie deshalb, weil Deparcieux seine Sterbetafel aus dem Jahr 1746 aus den französischen Tontinen der Jahre 1689 und 1696 ableitete. Jede der beiden Tontinen zerfiel in 14 Klassen (beginnend mit den Altersjahren 0 bis unter 5, 5 bis unter 10, ..., zuletzt 65 bis unter 70). Die Tafel von Deparcieux ist eine der ältesten Sterbetafeln, die für Versicherungszwecke oft angewandt worden ist.

In Amsterdam wurde 1671 eine einfache Tontine errichtet: „Die Stadt erhielt von 250 Tontinisten insgesamt 50 000 Gulden; sie zahlte jährlich 4 000 Gulden, also 8%. Der höhere Zinsfuß erklärt sich wieder daraus, dass die Stadt in Geldnot war. Die Tontinisten, auf deren Leben man setzte, müssen wohl sehr jung gewesen sein, denn im Jahr 1706, nach 35 Jahren, lebten noch 100 von 183 Tontinisten und im Jahre 1738 waren noch 20 am Leben (Du Pasquier, p. 22)“, vgl. Die Werke von Jakob Bernoulli. Band 3, S. 519. Hrsg. von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel 1975.

Lorenzo Tonti (1630 - 1695) gab der Tontine nicht nur den Namen, er gilt auch als deren Erfinder. Die Gründung einer solchen Einrichtung schlug Tonti dem Kardinal und französischen Staatsmann Jules Mazarin (1602 - 1661), eigentlich Giulio Mazarini, zur Besserung der zerrütteten Staatsfinanzen vor.

Über Tontinen fielen die Beurteilungen sehr unterschiedlich aus. Von Julius Wyler stammt die folgende Definition: „Die Tontine ist ein in Form von Anleihen, Anteilsgenossenschaften und Versicherungsgesellschaften auftretendes Spiel, in dem der Gewinn von der Dauer des menschlichen Lebens abhängig ist.“

In Deutschland wird die Tontine im Bundesgesetzblatt erwähnt: Gesetz vom 3. 11. 1994 (BGBl I S. 3385).

Umfassender Wandel der Leibrente im 17. Jahrhundert

Im 17. Jahrhundert vollzog sich in der Mathematik ein gewaltiger Schub im Umfeld umwälzender politischer Ereignisse. Erste Ansätze für die Bewertung von Leibrenten unter Berücksichtigung der Sterblichkeit und des Zinssatzes finden sich bei Johan de Witt (1625 - 1672). Von ihm erschien 1671 die Abhandlung *Waerdye van Lyf-Renten* (s. S. 143). Seit 1650 war er als Ratspensionär Hollands der Leiter der gesamten niederländischen Politik. Er führte die Seekriege mit England (1652 - 54, 1664 - 67). De Witt zwang u.a. durch ein Bündnis mit England und Schweden 1668 den französischen König Ludwig XIV., auf die Eroberung der spanischen Niederlande zu verzichten.

Im 17. Jahrhundert waren die Niederlande nicht nur die führende Handels- und Seemacht Europas, sondern auch das Zentrum des geistigen und wissenschaftlichen Lebens.

Der Niederländer Johann Hudde (1628 - 1704), einer der führenden Mathematiker Europas, verfügte über Sterbedaten von Personen, auf deren Leben in den Jahren 1586 - 1590 Leibrentenverträge abgeschlossen worden waren (Heinrich Braun, S. 88), s. S. 142. Hudde übernahm ab 1663 politische Ämter für die Stadt Amsterdam, deren Bürgermeister er auch war.

Überlebendentafel als Grundlage für die Berechnung von Leibrenten

Neue Wege zur Sterblichkeitsmessung und zur Bewertung von Leibrenten beschritt der berühmte Astronom Edmond Halley (1656 - 1742), der uns vor allem aufgrund des nach ihm benannten Kometen bekannt ist. Er veröffentlichte 1693 eine Arbeit mit dem Titel *An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives. By Mr. E. Halley, R.S.S.*
Der Titel dieser Schrift lautet ins Deutsche übertragen von Peter Dotzauer: „Eine Schätzung des Grades der Sterblichkeit der Menschheit, hergeleitet von wunderlichen Tabellen der Geburten und Begräbnisse in der Stadt Breslau; mit dem Versuch, den Preis der Rente auf Leben festzusetzen. Von Hrn. E. Halley, R.S.S.“

Nachfolgend ein Ausschnitt aus Halleys Werk (Übersetzung von Peter Dotzauer):
„Anwendung V. Hiervon hängt ab die Wertermittlung der Renten auf Leben; denn es ist klar, dass der Erwerber nur für solch einen Teil des Wertes der Rente zahlen sollte, wie er Aussichten hat zu leben; und dies sollte jährlich berechnet werden, und die Summe all dieser jährlichen Werte zusammengezählt wird den Wert der Rente für das Leben der vorgegebenen Person ergeben. Nun kann der heutige Betrag des Geldes, der nach einer Laufzeit von Jahren zu zahlen ist, zu einem beliebigen Zinssatz, aus bereits berechneten Tabellen entnommen werden; oder fast genau so schnell, durch die Tabelle der Logarithmen: Denn das arithmetische Gegenstück des Logarithmus der Einheit und seines jährlichen Zinses (das heißt, 1,06 für sechs Prozent, also 9,974694[1]) multipliziert mit der vorgegebenen Anzahl von Jahren, ergibt den heutigen Wert eines Pfundes zahlbar nach dem Ablauf so vieler Jahre.“

Halley bestimmte den Wert einer Leibrente nur für jedes fünfte Lebensalter. Abraham de Moivre (1667 - 1754) hielt die Vorschriften Halleys zur Berechnung des Barwerts einer Ren-

1 [10 – log 1,06 = 9,974694]

te für schwierig und umständlich. Die von Moivre entwickelten Formeln zur Berechnung des Barwerts und des Werts einer Leibrente findet man bei Heinrich Braun: *Die Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik*, S. 125 ff. (E. Czuber übersetzte die vierte Auflage (1756) der Schrift *Evaluation of Annuities on Lives* von Moivre ins Deutsche).

De Moivre setzte bei seinen Berechnungen als Lebensgrenze das Alter 86 fest. Für eine 50-jährige Person errechnete sich nach de Moivre bei 5 % Zins für eine Leibrente von 1 ein Wert von 10,35. Diesem Beispiel liegt ein Barwert (nachschüssig) von 16,55 zugrunde. Den angegebenen Wert von 10,35 erhält man nach de Moivre wie folgt: $\dfrac{1-\frac{1+i}{n}\cdot \text{Barwert}}{i}$

Dabei bedeuten: i der Zinssatz (Zinsfuß) = p / 100 und n die Anzahl der Jahre [86 – gegebenes Alter]. Legt man einen Zinssatz von 6 % – entsprechend den Berechnungen von Halley – zugrunde, so ergibt sich ein Leibrentenwert von 9,49 gegenüber dem von Halley berechneten 9,21. Nachstehend eine Gegenüberstellung von Leibrentenwerten für ausgewählte Altersjahre nach Halley und de Moivre:

Alter 50:	9,21	9,49
Alter 60:	7,60	7,83
Alter 70:	5,32	5,51.

Lebenserwartung und Barwert

An anderer Stelle wurde schon erwähnt, dass Nikolaus Bernoulli (1687 - 1759) die von ihm berechnete mittlere Lebenserwartung zur Bewertung von Renten heranzog. So schätzte er zum Beispiel für einen Neugeborenen mit einer Lebenserwartung von 18,22 Jahren den Preis einer Rente auf 11,78 bei einem Zinsfuß von 5 %, vgl. *Die Werke von Jakob Bernoulli.* Band 3, S. 550. Hrsg von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Basel 1975. Sein Rechenergebnis für die Rente bezeichnet man heute als Barwert einer nachschüssigen Zeitrente.

Noch früher setzte sich Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) umfassend mit Leibrenten und einer Absterbeordnung auseinander. Seine Arbeiten auf diesen Gebieten wurden durch die Herausgabe der *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik* im Jahr 2000 bekannter. Die versicherungswirtschaftlichen und finanzwissenschaftlichen Schriften von Leibniz waren zum großen Teil nur in den französischen und lateinischen Urschriften zugänglich. Auf eine brillante Formel zur Barwertbestimmung stößt man im Abschnitt III. 17 „Über Pensionen" des genannten Werks:

„Wenn daher eine jährliche Pension über a Jahre hinweg gezahlt werden und $\frac{v}{v+1} = b$ sein soll, wird ihr gegenwärtiger Wert $\frac{b-b^{a+1}}{1-b}$ p oder (...) sein." Darin steht p für die Höhe der jährlichen Leistung und v sei die Anzahl, wie häufig der gesetzmäßige Zins im Kapital enthalten ist (im Reich 20)." Dieser Ausdruck besticht wegen seiner Kürze und führt zum gleichen Ergebnis wie die heutzutage gängigen Formeln zur Bestimmung des Barwerts bei nachschüssiger Berechnung.

Dem Begriff Barwert begegnet man in verschiedenen Bereichen, so zum Beispiel: kaufmänische Diskontierung, ewige Rente, Rentenrechnung und Sterbetafel. Hier wird nur der Barwert einer Rente definiert. Barwert oder Mise der Rente heißt der Betrag, durch den man die Verpflichtung sämtlicher Zahlungen sofort ablösen kann. Unter Mise versteht man auch die Zahlung der Versicherungsprämien nicht in Raten, sondern in einer einzigen Summe.

Versicherungsbarwerte anhand von sogenannten Kommutationszahlen

Erste Anfänge der heute gebräuchlichen Kommutationszahlen finden sich bei William Dale (geb. 1726). Er bekannte sich erst später als der Verfasser eines 1772 erschienenen Werkes, das sich mit den Berechnungen für Altersrenten befasste. Seine Kommutationswerte dienten dazu, die Rentenbarwerte vom Alter 50 an zu berechnen. Dale hat die Werte l_x (v^{x-50}) tabelliert. Dieses Werk wurde wenig bekannt, so Heinrich Braun. Dale gebührt der Ruhm, als erster Hilfszahlen für die Rentenberechnung angedeutet zu haben, die zur Kolumnarmethode hinführten, vgl. Heinrich Braun: Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik. Berlin 1963, S. 165 ff.

Nicolaus Tetens (1736 - 1807) hatte als Erster in Deutschland die Berechnung von Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerten durchgeführt. Noch heute geschieht deren Berechnung in gleicher Weise. Auf seine Werke über die Leibrenten wurde schon hingewiesen („Bayern in Zahlen" 12/2004 und s. S. 14). Tetens wurde damals die Prüfung der Finanzlage der 1767 gegründeten Calenbergischen Witwenkasse übertragen.

Auf Wunsch des Senats der Universität Göttingen führte der große Mathematiker und Astronom Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) 1845 eine Untersuchung des Zustandes der 1739 gegründeten Professorenwitwenkasse durch. Abb. 1 zeigt seine „Tafeln zur Bestimmung des Zeitwerthes von einfachen Leibrenten und von Verbindungsrenten" (s. a. S. 145).

Frauen							Männer					
Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss				Alter	Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss			
		von 3½ proc.		von 4 proc.					von 3½ proc.		von 4 proc.	
log.	decr.	log.	num.	log.	num.		log.	decr.	log.	num.	log.	num.
4,00620 92	620 92					19						
4,00000 00	599 10	1,27772	18,9548	1,24326	17,5088	20	4,00000 00	270 10	1,29473	19,7118	1,26069	18,2258
3,99400 90	580 69	1,27625	18,8909	1,24210	17,4624	21	3,99729 90	271 79	1,29068	19,5291	1,25704	18,0733
3,98820 21	561 43	1,27451	18,8152	1,24068	17,4052	22	3,99458 11	277 93	1,28644	19,3391	1,25319	17,9137
3,98258 78	541 31	1,27246	18,7265	1,23898	17,3372	23	3,99180 18	279 72	1,28205	19,1448	1,24920	17,7500
3,97717 47	524 98	1,27009	18,6248	1,23697	17,2572	24	3,98900 46	281 53	1,27745	18,9430	1,24500	17,5792
3,97192 49	512 64	1,26743	18,5109	1,23466	17,1656	25	3,98618 93	287 88	1,27262	18,7335	1,24059	17,4016
3,96679 85	499 79	1,26450	18,3865	1,23209	17,0644	26	3,98331 05	289 80	1,26760	18,5183	1,23598	17,2180
3,96180 06	491 21	1,26127	18,2504	1,22923	16,9523	27	3,98041 25	296 33	1,26233	18,2950	1,23113	17,0268
3,95688 85	487 14	1,25777	18,1037	1,22612	16,8315	28	3,97744 92	302 96	1,25683	18,0646	1,22606	16,8292
3,95201 71	487 76	1,25403	17,9487	1,22277	16,7019	29	3,97441 96	309 74	1,25110	17,8271	1,22075	16,6246
3,94713 95	493 30	1,25009	17,7864	1,21922	16,5662	30	3,97132 22	321 30	1,24512	17,5840	1,21519	16,4131
3,94220 65	498 96	1,24599	17,6192	1,21552	16,4256	31	3,96810 92	342 54	1,23891	17,3344	1,20942	16,1963
3,93721 69	504 77	1,24172	17,4468	1,21165	16,2800	32	3,96468 38	369 01	1,23257	17,0832	1,20351	15,9775
3,93216 92	510 70	1,23726	17,2688	1,20761	16,1292	33	3,96099 37	400 93	1,22614	16,8323	1,19751	15,7582
3,92706 22	511 57	1,23261	17,0848	1,20338	15,9729	34	3,95698 44	428 88	1,21966	16,5830	1,19147	15,5407
3,92194 65	517 68	1,22769	16,8923	1,19889	15,8085	35	3,95269 56	457 62	1,21309	16,3338	1,18533	15,3225
3,91676 97	518 60	1,22254	16,6931	1,19418	15,6379	36	3,94811 94	482 28	1,20641	16,0844	1,17910	15,1043
3,91158 37	524 87	1,21710	16,4854	1,18918	15,4589	37	3,94329 66	502 71	1,19957	15,8332	1,17272	14,8841
3,90633 50	531 28	1,21138	16,2696	1,18391	15,2725	38	3,93826 95	523 80	1,19252	15,5782	1,16612	14,6597
3,90102 22	532 35	1,20537	16,0461	1,17837	15,0790	39	3,93303 15	540 45	1,18523	15,3189	1,15929	14,4307
3,89569 87	538 95	1,19900	15,8125	1,17247	14,8755	40	3,92762 70	562 86	1,17764	15,0536	1,15217	14,1961
3,89030 92	545 72	1,19230	15,5704	1,16624	14,6637	41	3,92199 84	586 04	1,16978	14,7837	1,14477	13,9562
3,88485 20	558 40	1,18523	15,3189	1,15965	14,4427	42	3,91613 80	610 09	1,16163	14,5087	1,13709	13,7116
3,87926 80	565 68	1,17783	15,0603	1,15274	14,2148	43	3,91003 71	640 46	1,15317	14,2290	1,12910	13,4616
3,87361 12	573 14	1,17002	14,7917	1,14542	13,9771	44	3.90363 25	666 56	1,14443	13,9455	1,12085	13,2085
3,86787 98	586 78	1,16175	14,5127	1,13764	13,7291	45	3,89696 69	693 73	1,13535	13,6569	1,11225	12,9494
3,86201 20	600 85	1,15306	14,2253	1,12944	13,4722	46	3,89002 96	727 74	1,12589	13,3625	1,10326	12,6841
3,85600 35	615 43	1,14390	13,9284	1,12079	13,2067	47	3,88275 22	763 30	1,11608	13,0641	1,09392	12,4143
3,84984 92	636 73	1,13423	13,6216	1,11163	12,9309	48	3,87511 92	800 54	1,10588	12,7609	1,08422	12,1400
3,84348 19	658 84	1,12407	13,3067	1,10198	12,6468	49	3,86711 38	839 82	1,09528	12,4531	1,07411	11,8608
3,83689 35	681 83	1,11338	12,9832	1,09180	12,3537	50	3,85871 56	886 64	1,08425	12,1408	1,06355	11,5758
3.83007 52	712 30	1,10210	12,6503	1,08103	12,0511	51	3,84984 92	936 67	1,07280	11,8250	1,05259	11,2874
3,82295 22	757 37	1,09024	12,3094	1,06969	11,7405	52	3,84048 25	989 38	1,06091	11,5055	1,04119	10,9949
3,81537 85	811 41	1,07789	11,9644	1,05786	11,4250	53	3,83058 87	1051 87	1,04854	11,1826	1,02932	10,6985
3,80726 44	868 28	1,06508	11,6161	1,04556	11,1062	54	3,82007 00	1125 16	1,03574	10,8577	1,01700	10,3993
3,79858 16	935 35	1,05177	11,2634	1,03277	10,7837	55	3,80881 84	1203 60	1,02254	10,5327	1,00427	10,0988
3,78922 81	1006 47	1,03799	10,9142	1,01951	10,4595	56	3,79678 24	1287 88	1,00893	10,2077	0,99113	9,7978
3,77916 34	1089 54	1,02371	10,5612	1,00574	10,1330	57	3,78390 36	1378 83	0,99489	9,8830	0,97756	9,4964
3,76826 80	1178 40	1,00897	10,2086	0,99150	9,8062	58	3,77011 53	1477 41	0,98041	9.5590	0,96355	9,1950
3,75648 40	1273 91	0,99373	9,8567	0,97677	9,4792	59	3,75534 12	1584 80	0,96547	9,2357	0,94909	8,8938

Abb. 1 Aus: Gauß, Carl Friedrich: Werke. Band IV, 2. Abdr. Nachlass. [Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Auf die Bestimmung der Bilanz für Witwenkassen.]. Herausg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1880.

Frauen						Alter	Männer					
Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss					Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss			
		von 3½ proc.		von 4 proc.					von 3½ proc.		von 4 proc.	
log.	decr.	log.	num.	log.	num.		log.	decr.	log.	num.	log.	num.
3,75648 40	1273 91	0,99373	9,8567	0,97677	9,4792	59	3,75534 12	1584 80	0,96547	9,2357	0,94909	8,8938
3,74374 49	1377 06	0,97797	9,5052	0,96150	9,1516	60	3,73949 32	1694 15	0,95009	8,9144	0,93417	8,5935
3,72997 43	1489 06	0,96166	9,1550	0,94568	8,8242	61	3,72255 17	1814 48	0,93416	8,5933	0,91869	8,2925
3,71508 37	1611 37	0,94478	8,8060	0,92928	8,4972	62	3,70440 69	1947 18	0,91770	8,2737	0,90267	7,9922
3,69897 00	1745 74	0,92730	8,4586	0,91229	8,1712	63	3,68493 51	2095 16	0,90069	7,9559	0,88611	7,6932
3,68151 26	1894 36	0,90922	8,1137	0,89468	7,8466	64	3,66398 35	2260 86	0,88317	7,6414	0,86901	7,3962
3,66256 90	2059 94	0,89053	7,7720	0,87647	7,5243	65	3,64137 49	2447 95	0,86519	7,3315	0,85144	7,1030
3,64196 96	2256 32	0,87126	7,4347	0,85766	7,2055	66	3,61689 54	2661 10	0,84683	7,0280	0,83349	6,8153
3,61940 64	2479 29	0,85157	7,1051	0,83842	6,8932	67	3,59028 44	2894 45	0,82824	6,7335	0,81530	6,5358
3,59461 35	2711 66	0,83160	6,7858	0,81889	6,5901	68	3,56133 99	3139 65	0,80952	6,4494	0,79697	6,2657
3,56749 69	2942 61	0,81130	6,4759	0,79901	6,2952	69	3,52994 34	3398 30	0,79067	6,1755	0,77850	6,0049
3,53807 08	3183 64	0,79047	6,1726	0,77858	6,0059	70	3,49596 04	3686 96	0,77172	5,9118	0,75992	5,7534
3,50623 44	3450 27	0,76898	5,8746	0,75749	5,7212	71	3,45909 08	4012 70	0,75288	5,6608	0,74144	5,5136
3,47173 17	3764 21	0,74686	5,5829	0,73576	5,4420	72	3,41896 38	4348 31	0,73449	5,4261	0,72339	5,2892
3,43408 96	4121 69	0,72439	5,3014	0,71367	5,1721	73	3,37548 07	4669 35	0,71663	5,2075	0,70587	5,0801
3,39287 27	4534 75	0,70185	5,0332	0,69148	4,9145	74	3,32878 72	4957 67	0,69911	5,0016	0,68869	4,8830
3,34752 52	4998 35	0,67969	4,7829	0,66965	4,6736	75	3,27921 05	5209 54	0,68148	4,8026	0,67140	4,6924
3,29754 17	5500 03	0,65840	4,5541	0,64869	4,4534	76	3,22711 51	5451 22	0,66316	4,6043	0,65342	4,5021
3,24254 14	5955 64	0,63847	4,3498	0,62908	4,2568	77	3,17260 29	5699 24	0,64372	4,4027	0,63432	4,3084
3,18298 50	6306 96	0,61949	4,1638	0,61042	4,0777	78	3,11561 05	5985 00	0,62282	4,1958	0,61376	4,1092
3,11991 54	6530 24	0,60023	3,9832	0,59147	3,9036	79	3,05576 05	6364 50	0,60036	3,9844	0,59162	3,9050
3,05461 30	6694 67	0,57881	3,7915	0,57038	3,7186	80	2,99211 15	6886 75	0,57689	3,7747	0,56846	3,7022
2,98766 63	7016 08	0,55367	3,5783	0,54554	3,5119	81	2,92324 40	7016 08	0,55367	3,5783	0,54554	3,5119
2,91750 55	7677 23	0,52541	3,3528	0,51755	3,2927	82	2,85308 32	7677 23	0,52541	3,3528	0,51755	3,2927
2,84073 32	8715 01	0,49709	3,1411	0,48948	3,0866	83	2,77631 09	8715 01	0,49709	3,1411	0,48948	3,0866
2,75358 31	9748 49	0,47327	2,9735	0,46588	2,9233	84	2,68916 08	9748 49	0,47327	2,9735	0,46588	2,9233
2,65609 82	10464 82	0,45516	2,8520	0,44800	2,8054	85	2,59167 59	10464 82	0,45516	2,8520	0,44800	2,8054
2,55145 00	10897 02	0,44032	2,7562	0,43339	2,7126	86	2,48702 77	10897 02	0,44032	2,7562	0,43339	2,7126
2,44247 98	11004 13	0,42591	2,6663	0,41925	2,6257	87	2,37805 75	11004 13	0,42591	2,6663	0,41925	2,6257
2,33243 85	11233 04	0,40746	2,5554	0,40109	2,5182	88	2,26801 62	11233 04	0,40746	2,5554	0,40109	2,5182
2,22010 81	11630 44	0,38481	2,4256	0,37875	2,3919	89	2,15568 58	11630 44	0,38481	2,4256	0,37875	2,3919
2,10380 37	12153 25	0,35819	2,2813	0,35247	2,2515	90	2,03938 14	12153 25	0,35819	2,2813	0,35247	2,2515
1,98227 12	12493 87	0,32708	2,1236	0,32174	2,0977	91	1,91784 89	12493 87	0,32708	2,1236	0,32174	2,0977
1,85733 25	13305 66	0,28570	1,9306	0,28075	1,9087	92	1,79291 02	13305 66	0,28570	1,9306	0,28075	1,9087
1,72427 59	14449 23	0,23416	1,7146	0,22962	1,6968	93	1,65985 36	14449 23	0,23416	1,7146	0,22962	1,6968
1,57978 36	16481 03	0,16881	1,4751	0,16471	1,4612	94	1,51536 13	16481 03	0,16881	1,4751	0,16471	1,4612
1,41497 33	18452 44	0,09036	1,2313	0,08672	1,2210	95	1,35055 10	18452 44	0,09036	1,2313	0,08672	1,2210
1,23044 89	23044 89	9,97728	0,9490	9,97412	0,9421	96	1,16602 66	23044 89	9,97728	0,9490	9,97412	0,9421
1,00000 00	30103 00	9,82594	0,6698	9,82327	0,6657	97	0,93557 77	30103 00	9,82594	0,6698	9,82327	0,6657
0,69897 00	39794 00	9,58712	0,3865	9,58503	0,3846	98	0,63454 77	39794 00	9,58712	0,3865	9,58503	0,3846
0,30103 00			0		0	99	0,23660 77			0		0

Die Tabelle von Gauß beschränkt sich auf die Altersjahre 19 bis 99. [Den Zahlenangaben dieser Tafeln liegen die von BRUNE im 16. Bande des CRELLEschen Journals für Mathematik zusammengestellten Erfahrungen über die in der k. Preussischen allgemeinen Witwen-Verpflegungs-Anstalt während der Zeit von 1776 bis 1834 successive aufgenommenen 31 500 Ehepaare zu Grunde …], vgl. Abschnitt „Einrichtung und Gebrauch der Tafeln".

Will man das Zahlenwerk von Gauß nachvollziehen, so muss man in einem ersten Schritt die Anzahl der Lebenden entlogarithmieren. Die Größen N_x und D_x fehlen zwar in der Tabelle, letztlich basiert der nachschüssig berechnete „Leibrentenwerth" auf diesen beiden Größen.

Erste Diskontierung von Simon Stevin

Nennenswert ist an dieser Stelle, dass bereits rund hundert Jahre vor Leibniz der aus Brügge stammende Simon Stevin (1548 - 1620) diskontierte Zahlen und Barwerte berechnete; 1585 erschien das Werk *La Pratique d'Arithmetique*. Stevin führte die Berechnungen für eine Reihe von Zinssätzen und für jeweils dreißig Jahre durch (ausgehend von einem Betrag von zehn Millionen). Der linke Teil von Abb. 2 zeigt einen Ausschnitt einer Tabelle der genannten Schrift.

Die erste Spalte beinhaltet die Anzahl der Jahre. In der zweiten Spalte werden die diskontierten Beträge ausgewiesen. Der für zehn Jahre diskontierte Betrag (6 755 640) errechnet sich in heutiger Schreibweise wie folgt[2] :

$$10^7 \cdot \frac{1}{1{,}04^{10}} = 6\,755\,642.$$

Bei den in der dritten Spalte nachgewiesenen Zahlen handelt es sich um nachschüssig berechnete Barwerte. Sie sind übrigens die kumulierten Werte der zweiten Spalte. Den in der zehnten Zeile ausgewiesenen Wert (81 108 949) erhält man in heutiger Schreibform folgendermaßen:

$$\frac{10^7}{1{,}04^{10}} \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} = 81\,108\,958.$$

Die zweite Spalte dieser Tabelle verdient aus der Sicht der Berechnung von Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerten eine besondere Beachtung. Zweihundert Jahre später führte Nicolaus Tetens den gleichen Rechengang durch. Während Stevin jeweils den Betrag von zehn Millionen wählte, ließ Tetens in seine Berechnungen die Anzahl der Überlebenden nach der Absterbeordnung von Peter Süßmilch (1707 - 1767) einfließen. Heute nennt man diese Größe „Diskontierte Zahl der Lebenden des Alters x". Hinter den Berechnungen von Stevin und Tetens steht jeweils der Diskontierungsfaktor $\frac{1}{q^n}$.

Der rechte Teil von Abb. 2 zeigt die Tabelle von Tetens. Für das in Spalte A ausgewiesene Alter 10 errechnet sich bei Heranziehung der Zahl der Lebenden (Spalte B) der entsprechende Wert in Spalte C wie folgt: $359{,}40 = 532 \cdot \frac{1}{1{,}04^{10}}$.

Die hier angesprochene Diskontierung fällt in das Gebiet der Zinseszinsrechnung. Die kaufmännische Diskontierung rechnet bekanntlich nur mit einfachen Zinsen.

Das genannte Werk von Stevin verdient besondere Beachtung, weil erst rund hundert Jahre später Leibniz den Satz prägte „Für höhere Potenzen werden wir Logarithmen zur Anwendung bringen, …"

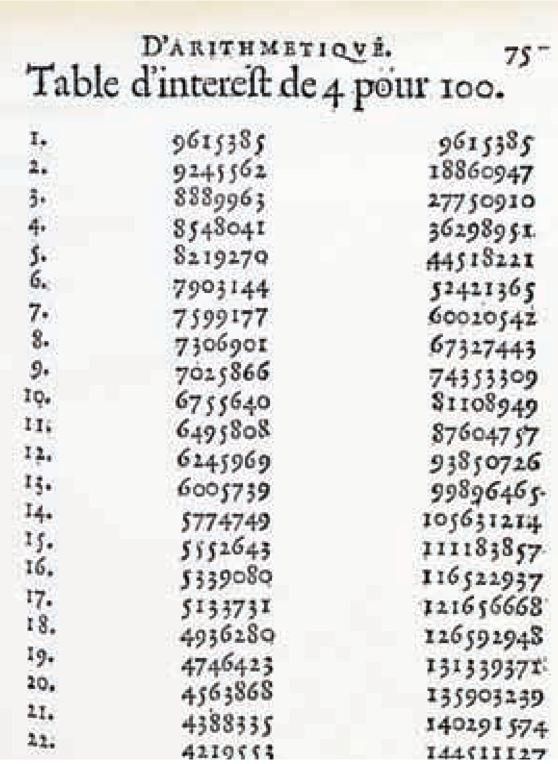
Von den Logarithmen machte auch Edmond Halley bei seiner Berechnung des Barwerts einer Rente im Jahr 1693 Gebrauch.

Die von Stevin bearbeiteten Tafeln zur Berechnung von Zinseszinsen wurden von Jost Bürgi (1552 - 1632) fortgesetzt. Wurde Bürgi bei der Schaffung seiner „Progress-Tabulen" davon etwas inspiriert? Diese veröffentlichte er 1620 unter dem Titel *Aritmetische und Geometrische Progreß-Tabulen/sambt gründlichem unterricht/wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/ und verstanden werden sol*. Vielleicht hat die Zinseszinsrechnung die bemerkenswerte Zahl e (Basis der natürlichen Logarithmen =2,718282…) hervorgebracht. Die 10 000. Potenz der von Bürgi gewählten Zahl 1,0001 ergibt den Wert 2,718146 und stimmt mit der Zahl e = 2,718282 auf drei Nachkommastellen überein.

Zur Person Stevin: Er war ein Verfechter der Dezimalbruchrechnung, 1585 wurde das Buch *De Thiende* (Dezimalbruchrechnung) veröffentlicht. Er forderte die Einführung dezimal unterteilter Münz-, Maß- und Gewichtssysteme. Während andere negative Zahlen ablehnten, hatte Stevin diese anerkannt. Stevin setzte sich auch für die indisch-arabische Zahlenschreibweise von Brüchen ein. Den für den Schiffbau wichtigen Begriff des Metazentrums führte Stevin ein. Er war übrigens ein Anhänger der kopernikanischen Lehre.

2 Die Berechnung kann auch logarithmisch oder (für kleine Werte) mit dem Binomischen Lehrsatz durchgeführt werden.

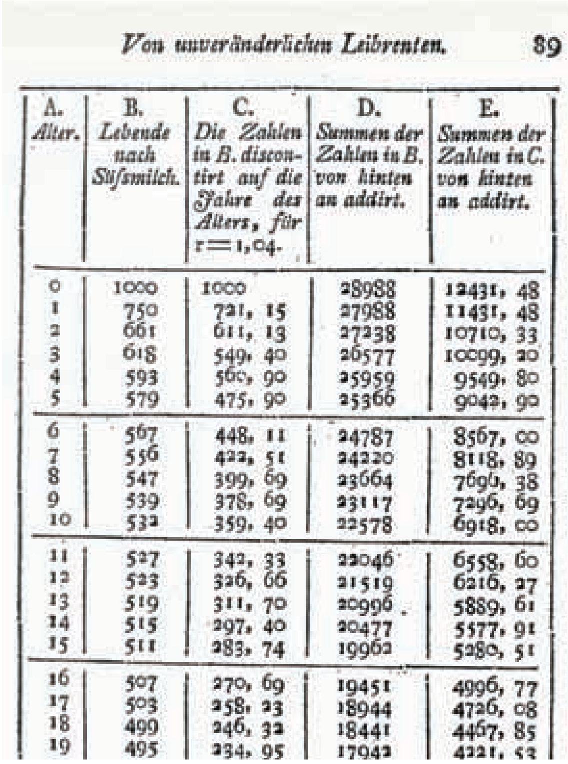
Diskontierte Zahlen von Simon Stevin (links) und Nicolaus Tetens (rechts)



D'ARITHMETIQVE. 75

Table d'intereſt de 4 pour 100.

1.	9615385	9615385
2.	9245562	18860947
3.	8889963	27750910
4.	8548041	36298951
5.	8219270	44518221
6.	7903144	52421365
7.	7599177	60020542
8.	7306901	67327443
9.	7025866	74353309
10.	6755640	81108949
11.	6495808	87604757
12.	6245969	93850726
13.	6005739	99896465
14.	5774749	105631214
15.	5552643	111183857
16.	5339080	116522937
17.	5133731	121656668
18.	4936280	126592948
19.	4746423	131339371
20.	4563868	135903239
21.	4388335	140291574
22.	4219553	144511127



Von unveränderlichen Leibrenten. 89

A. Alter.	B. Lebende nach Süſsmilch.	C. Die Zahlen in B. discontirt auf die Jahre des Alters, für r = 1,04.	D. Summen der Zahlen in B. von hinten an addirt.	E. Summen der Zahlen in C. von hinten an addirt.
0	1000	1000	28988	12431, 48
1	750	721, 15	27988	11431, 48
2	661	611, 13	27238	10710, 33
3	618	549, 40	26577	10099, 20
4	593	560, 90	25959	9549, 80
5	579	475, 90	25366	9042, 90
6	567	448, 11	24787	8567, 00
7	556	422, 51	24220	8118, 89
8	547	399, 69	23664	7696, 38
9	539	378, 69	23117	7296, 69
10	532	359, 40	22578	6918, 00
11	527	342, 33	22046	6558, 60
12	523	326, 66	21519	6216, 27
13	519	311, 70	20996	5889, 61
14	515	297, 40	20477	5577, 91
15	511	283, 74	19962	5280, 51
16	507	270, 69	19451	4996, 77
17	503	258, 23	18944	4726, 08
18	499	246, 32	18441	4467, 85
19	495	234, 95	17942	4221, 53

Abb. 2 Aus: Stevin, Simon: La Pratique d‘ Arithmetique. In: L' Artithmetique. Leyden 1585 bzw. aus: Tetens, Johann Nicolaus: Einleitung zur Berechnung der Leibrenten … . Bd. 1. Leipzig 1785.

Im Zusammenhang mit den Berechnungen von Stevin sei an den englischen Mathematiker Charles Babbage (1792 - 1871) erinnert, der bedeutende Arbeiten auf dem Gebiet der Rechenmaschinen leistete. Eindrucksvolles wurde 120 Jahre nach seinem Tod vermeldet. „Angetrieben von einer Handkurbel rechnete am 29. November 1991 eine drei Tonnen schwere Maschine aus rund 4 000 bronzenen und gusseisernen Teilen x^7 für alle x von 1 bis 100 aus.“, vgl. *Denkendes Räderwerk* in „Spektrum der Wissenschaft“, März 1993. Die nach den Originalzeichnungen gebaute „Difference Engine No. 2“ lieferte fehlerlose Resultate.

Die Anfänge der Lebensversicherung fallen in das 18. Jahrhundert

Lange Zeit herrschte die Auffassung, wonach der freie Mensch keinen Preis habe. Nach römischem Recht war es unzulässig, auf das Leben eines freien Bürgers einen Geldbetrag auszusetzen. Bemerkenswert ist, dass die Preise der Sklaven zur Zeit des römischen Kaisers Diokletian (reg. 284 - 305) nach Altersgruppen und nach dem Geschlecht festgelegt worden waren. Dies zeigt ein Inschriftenfund aus dem Jahr 1970 (s. S. 36).

Gegen die Einwände, man könne mit Menschen nicht wie mit Waren rechnen, wandte sich Nikolaus Bernoulli (1687 - 1759). Dieser brachte zum Ausdruck, dass man nur mit der Wahrscheinlichkeit der Dauer des menschlichen Lebens rechne. Auch hielt er Spiele, Wetten und Lotterien für erlaubt, solange sie gerecht sind und es sich dabei um ehrenwerte Dinge handle.[3]

Nach Julius Wyler gab es in England schon seit 1709 Versicherungsgesellschaften, die Erlebnisfallversicherungen abschlossen. Dagegen nicht in Frankreich; wer dort irgendwelche finanzielle Fürsorge für die Zukunft treffen wollte, war gezwungen, eine Leibrente zu kaufen oder einer Tontine beizutreten, vgl. Wyler, Julius: Die Tontinen in Frankreich. München und Leipzig 1916. (=Staats- und sozialwissenschaftliche Forschungen; 189).

Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermöglichte die Einrichtung von Versicherungen. Die verschiedenen For-

3 In Bayern wurde 1735 zur Aufbesserung der Staatsfinanzen das Lottospiel eingeführt.

men der Lebensversicherung (Leibrente, Erlebensfallversicherung, Todesfallversicherung und Versicherung verbundener Leben) sind ein Anwendungsgebiet der Zinseszins- und Rentenrechnung. Die Sterbetafel ist neben der Zinseszins- und Rentenrechnung die Grundlage der Versicherungsmathematik. Eine Sterbetafel (Überlebendentafel) ist die maßgebliche Basis, um Lebensversicherungen zu tarifieren. Eine Lebensversicherung muss wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Versicherungsfall in einem bestimmten Zeitraum eintritt. Schließlich soll eine Versicherung dem Schutz der Familie und der Vorsorge für das eigene Alter dienen.

Als erste Lebensversicherungsanstalt auf mathematisch-statistischer Grundlage gilt die 1762 in England gegründete „Equitable Life Assurance Society". Das erklärt wohl auch die Herkunft der in einer Überlebendentafel gebrauchten Zeichen. Sie wurden in den 50er Jahren des 19. Jahrhunderts von Mathematikern englischer Lebensversicherungsgesellschaften vereinbart. Altenburger hat das auf wenige Regeln aufgebaute englische Zeichensystem zusammengefasst, wie Heinrich Braun ausführte. Hier eine kleine Auswahl:

l (living) für die Anzahl der Lebenden
d (dead) für die Anzahl der Toten
p (probality of live) für die Überlebenswahrscheinlichkeit
q für die Sterbewahrscheinlichkeit [q folgt auf p].

Die sogenannten Witwen- und Waisenkassen wurden im 18. Jahrhundert errichtet. Der Konstrukteur der ersten bayerischen „Mortalitäts-Tafel" [Sterbetafel], Dismas A. Gebhard (1784 - 1846), berichtete im ersten Band seiner Schrift *Ueber Wittwen- und Waisen-Pensions-Anstalten*, dass [in Bayern] 1808 die Pensions-Anstalt für die Witwen und Waisen der Advokaten entstand. Zwischen den Jahren 1817 und 1827 wurden mehrere Anstalten für die Witwen und Waisen der Schullehrer in jedem der damals acht Kreise des Königreichs eingerichtet. Gebhard sah kein Bedürfnis nach solchen Anstalten beim größten Teil des Volkes – den Bauern. Wohl aber bei den Familienvätern, nach deren Tod ihre Hinterlassenen aller Substanzmittel beraubt werden, wenn sie nicht so viel Vermögen besitzen, dass sie vom Ertrag desselben leben können. Der in Lauterhofen (Oberpfalz) geborene Gebhard war in den Jahren 1826 - 1828 vom Finanzministerium mit den Arbeiten zum Entwurf einer Satzung und den Vorbereitungsarbeiten für die Errichtung einer Pensionsanstalt für Witwen und Waisen beauftragt worden.

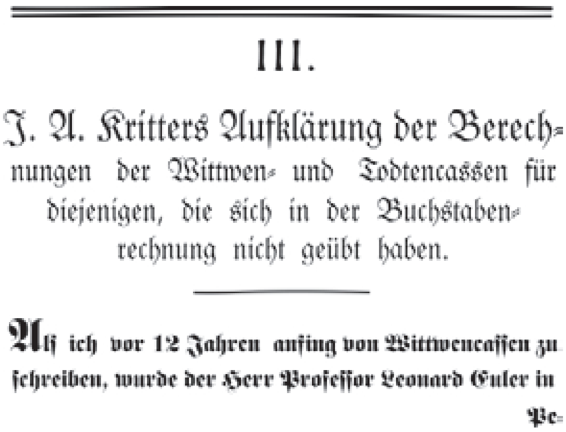
Dismas A. Gebhard beklagte den Zustand der „Wittwen- und Waisen-Pensionsanstalten". So schreibt er 1832: „Vergleicht man die älteren gründlichen Schriften über Wittwen- und Waisen-Pensionsanstalten mit den neuesten, so ist es beinahe unbegreiflich, wie man nach 70- bis 80-jährigen Erfahrungen, und nach solchen erleuchteten Vorgängern noch so viel Oberflächliches an den Tag fördern konnte." Gebhard erwähnte an anderer Stelle einen Aufsatz des Prof. Euler im Neuen Hamburgischen Magazin (Jahrgang 1770), „in welchem Kritters Berechnungen in algebraische Formen gebracht wurden". Abbildung 3 zeigt die erste Seite der Abhandlung von Euler. Mit den Berechnungen von Kritter ist dessen Schrift *Oeconomisch-politische Auflösung der wichtigsten Fragen wegen der Einrichtung dauerhafter Witwen-Cassen* … von 1768 (Göttingen) gemeint. Sie wird von Gebhard als die erste gründliche Schrift in diesem Fach bezeichnet, s. S. 144).


I.
Des
Herrn Leonhard Eulers
nöthige
Berechnung zur Einrichtung
einer Witwencaße.

Hierbey kommt alles auf eine richtige Erörterung dieser Frage an: ein Ehepaar, wovon der Mann m Jahr, die Frau aber n Jahr alt ist, bezahlet anitzo in die Caße eine gewiße Summe Geld a, und macht sich anheischig, so lange die beyde leben, jährlich noch eine gewiße Summe b zu der Caße beyzutragen: dagegen verpflichtet sich die Caße nach dem Tode des Mannes, seiner Witwe jährlich eine Pension = p, so lange sie lebet, auszuzahlen; nun ist die Frage, wie das richtige
A a Be-

Abb. 3 Aus: Neues Hamburgisches Magazin. 1767 - 81. 8. Bd., 43. St., 1770, S. 3.

Johann Augustin Kritter meinte, dass die Schrift von Euler nur denen verständlich ist, welche die höhere Rechenkunst und die Algebra gelernt haben. Deshalb verfasste er 1781 eine Abhandlung, in der er sich der algebraischen Sprache so viel wie möglich enthalten wollte (siehe Abbildung 4).



III.

J. A. Kritters Aufklärung der Berechnungen der Wittwen- und Todtencassen für diejenigen, die sich in der Buchstabenrechnung nicht geübt haben.

Als ich vor 12 Jahren anfing von Wittwencassen zu schreiben, wurde der Herr Professor Leonard Euler in Pe-

Abb. 4 Abschrift aus: Göttingisches Magazin der Wissenschaften und Litteratur. 2. Jg., 1. St., 1781, S. 390.

Die erste deutsche Lebensversicherung wurde 1827 von Ernst Wilhelm Arnoldi (1778 - 1841) gegründet. Von seinem Landesherrn erhielt er die Lizenz zur Errichtung der „Gothaer Lebensversicherungsbank.“ Die 1838 in Triest gegründete Riunione Adriatica di Sicurtà (RAS) war schon im frühen 19. Jahrhundert auf dem deutschen Markt tätig (s. Abb. 5).

Abb. 5 Aus: Allianz Aktiengesellschaft Holding: Bericht über das Geschäftsjahr 1989.

Die Lebensversicherung für jedermann fällt in das Jahr 1916, als die „Münchener Rück“ eine Abteilung einrichtete, die sich mit der Deckung „erhöhter Risiken“ beschäftigte. Zuvor war eine Lebensversicherung nur gesunden Menschen vorbehalten.

Nach Brockhaus (1955) dient eine Lebensversicherung zur Deckung eines Vermögensbedarfs, der wegen der Ungewißheit der menschlichen Lebensdauer nicht mit Sicherheit durch den Ertrag der Lebensarbeit eines einzelnen gedeckt werden kann. Der Versicherungsgedanke geht zurück auf die Bildung einer Schicksals- bzw. Risikogemeinschaft. Eine Gruppe von Personen, die demselben Risiko ausgesetzt ist, bildet einen „Schadenpool“. Dies gleicht der Idee der Aktiengesellschaft: Damit nicht ein Einzelner die Finanzierung übernehmen muss, gründete man eine Gesellschaft, an der sich viele beteiligen konnten, um so auch größere Investitionen aufbringen zu können.

Im deutschen Sprachraum wurde 1895 das Königliche Seminar für Versicherungswissenschaft der Universität Göttingen gegründet.

Eine erwähnenswerte Äußerung des berühmten Physikers Werner Heisenberg (1901 - 1976) sei hier wiedergegeben: „Daher kann sich niemand darüber wundern, dass wir Physiker hier Statistik treiben müssen, so wie etwa eine Lebensversicherungsgesellschaft über die Lebenserwartung ihrer vielen Versicherten statistische Rechnungen anstellen muss“, vgl. Heisenberg, Werner: Der Teil und das Ganze. Gespräche im Umkreis der Atomphysik. 9. Gespräche über das Verhältnis zwischen Biologie, Physik und Chemie (1930 - 1932). 5. Auflage. München 2003, S. 125.

Wandel im Umgang mit Risiken

Da jede menschliche Tätigkeit mit Risiken (Wagnissen) verbunden ist, suchte man schon in früher Zeit nach Möglichkeiten der Absicherung. Lange vor Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erkannte man, dass gewisse Schadensereignisse mit abschätzbaren Häufigkeiten auftreten.

In den Gesetzen des babylonischen Königs Hammurapi (reg. 1792 - 1750 v. Chr.) wurde schon der Fall einer Havarie zwischen einem stromabwärts und einem stromaufwärts fahrenden Schiff behandelt (Horst Klengel). Diese älteste Gesetzessammlung der Welt (1902 entdeckt) enthält auch Bestimmungen über die Haftpflicht. Hammurapi führte 282 Paragraphen ein, die das Leben der Menschen vom Strafrecht bis zum Hausbau regelte.

An Bedeutung gewinnen alternative Versicherungstechniken. Die Assekuranzunternehmen tendieren dazu, Katastrophenrisiken an die Kapitalmärkte zu transferieren. Zu den Risiken aus Lebensversicherungen zählt zum Beispiel der Fall, dass Katastrophen wie eine Vogelgrippe-Pandemie eine massive Auszahlung von Lebensversicherungen nach sich ziehen könnte. Denkbar wäre auch, dass eine markante Erhöhung der Lebensspanne der Menschen die Rentenverpflichtungen der Pensionskassen über Gebühr ansteigen lassen.

Seeversicherung reicht weit zurück

Schon in der Antike waren die Risiken auf See Anlaß zu Vereinbarungen über die Schadensteilung. Im 3. und 2. Jahrhundert vor Christus erlebte die Inselstadt Rhodos als See- und Handelsmacht ihre Blütezeit. Damals entstand eine erste Regelung über die Aufteilung des infolge Seewurfs (Überbordwerfen) entstandenen Schadens unter sämtlichen Frachteigentümern (*lex Rhodia de iactu*). Das rhodische Seerecht erlangte durch Rom Weltgeltung.

Dem griechischen Seerecht entlehnten die Römer das Seedarlehen (*fenus nauticum*, auch *pecunia traiecticia*). Nach Max Kaser (Das römische Privatrecht) wurde dieses für einen Seetransport, besonders zum Wareneinkauf, erteilt und hatte die Funktion einer Seeversicherung. Sie ist der älteste Zweig der kommerziell betriebenen Versicherung.

Um ein besonderes Seedarlehensgeschäft handelte es sich bei der Bodmerei (Verbodmung); sie wurde 1972 abgeschafft. Wegen der Fortschritte in der Nachrichtentechnik verlor sie an Bedeutung (Bank- und Versicherungslexikon von Henner Schierenbeck).

Seereisen waren solange mit zusätzlichen Risiken verbunden, als das Problem mit dem Längengrad ungelöst war. Da die Erde in vier Minuten ein Grad ihrer Rotation zurücklegt, lassen sich die Auswirkungen vor- oder nachgehender Uhren leicht ausmalen. Dieses Problem wurde erst im 18. Jahrhundert (1761) durch John Harrison (1693 - 1776) gelöst. Die Fertigstellung seiner H4 (Seeuhr zur Bestimmung der geographischen Länge) begünstigte Englands Aufstieg zur beherrschenden Seemacht im 18./19. Jahrhundert.

Plinius d. Ä. (um 23 - 79 n. Chr.) berichtete in seiner Naturkunde VI *Geographie Asien* (XXIV 83): „Nach den Sternen richtet man sich hier bei der Schiffahrt nicht; das Siebengestirn sieht man nicht mehr. «Vielmehr» nimmt man Vögel mit, die man von Zeit zu Zeit fliegen lässt und deren nach dem Land strebendem Flug man dann folgt. Auch fährt man höchstens vier Monate im Jahr zur See“ (nach Kai Brodersen 1996). Berühmt war der Leuchtturm Pharos von Alexandria (279 v.Chr.), dessen Licht man etwa 55 km weit sehen konnte.

Ende des 17. Jahrhunderts wurde das Londoner Kaffeehaus von Edward Lloyd Mittelpunkt der Seeversicherer. Für Lloyd's war lange Zeit eine eher intuitive Abschätzung der zu versichernden Risiken charakteristisch. Vorbei sind die Zeiten, in denen bei Lloyd's of London die Glocke geschlagen wurde, wenn die Nachricht von einem Schiffsuntergang eintraf. Mit Fragen der Schiffsversicherung setzte sich nach 1700 Nikolaus Bernoulli (1687 - 1759) auseinander.

Nicht ungenannt bleiben soll ein Eintrag in den Geschäftsbüchern der Medici aus dem Jahr 1395, bei dem es sich um eine Versicherung (Sichurtà) von Tortosaer Wolle handelt. Dieses Buch wurde in zwei Währungen geführt: Pisaer fiorini (fl.) in römischen Zahlzeichen geschrieben, während die Florentiner Währung in arabischen [indisch-arabisch] Ziffern erschien, vgl. Luca Pacioli.

Den bisherigen Ausführungen zum Thema Risiko soll ein historischer Abstecher in die Sphären der Finanzwelt folgen.

Die Aktie als Finanzierungsform zur Risikoverteilung

Die Entdeckung ferner Länder brachte neue Handelsbeziehungen. Mehr als wissenschaftlicher Ehrgeiz dürfte der Handel mit Gewürzen der Tropen den Anreiz zu den Entdeckungsreisen um die Wende vom 15. zum 16. Jahrhundert gewesen sein. Die Überwindung des Raumes durch den Verkehr, ob er nun der Menschen-, Güter- oder Nachrichtenbeförderung dient, beansprucht große Aufwendungen an Kapital. Das gilt für alle Staats- und Wirtschaftsformen. So entwickelten sich vom Mittelalter bis zum 17. Jahrhundert neue Finanzierungsarten.

Finanzinnovationen sollten der Kontrolle des Risikos dienen und die unvorhersehbare Zukunft sollte kalkulierbarer werden. Das Risiko eines Fehlschlags sollte auf mehrere Schultern verteilt werden.

Die erste Aktiengesellschaft der Welt wurde im Jahr 1602 mit der VOC (Vereenigde Oost-Indische Compagnie) in Den Haag gegründet. Diese Gesellschaft schuf zur Finanzierung ihrer Flotte die Aktie als Finanzierungsinstrument. Damals wie heute waren die Risiken des Aktienengagements nicht zu verkennen. Das Risiko mit VOC-Aktien könnte das zeitgenössische Bild *Seesturm mit Schiffbruch an einer Felsenküste* (1647) von Bonaventura Peeters (1614 - 1652) versinnbildlichen. Allgemein gilt die 1611 gegründete Börse in Amsterdam als älteste organisierte Börse der Welt. Beim Finanzierungsinstrument Aktie bestehen in einem Punkt zwischen damals und heute keine Unterschiede: Die Aktionäre sind die wichtigsten Geldgeber und die eigentlichen Risikoträger der Wirtschaft.

Die Gefahr der Zahlungsunfähigkeit eines Versicherers führte seit dem 17. Jahrhundert dazu, dass an die Stelle des Einzelversicherers die Aktiengesellschaft trat. Der Umgang mit Risiko ist das Kerngeschäft der Versicherer. Für Lebensversicherer stellen sich zwei wesentliche Fragen: Liegen den Versicherungsverträgen passende Sterbetafeln zugrunde und wie entwickeln sich die Kapitalmärkte in der Zukunft.

> Zur Gründung zahlreicher Aktienbanken kam es, als durch die aufkommende Industrialisierung der Kreditbedarf gewaltig zunahm.

Termingeschäfte – keine Erfindung unserer Zeit

In die Phase des Amsterdamer Frühkapitalismus fällt die Gründung der Amsterdam'schen Wisselbank (Wechselbank) im Jahr 1609. Sie erweiterte später ihre Aktivitäten um Waren- und Geldtermingeschäfte.

Die Anfänge des Terminhandels reichen zurück bis in das 16. Jahrhundert. So wurden noch nicht eingebrachte Ernten in einer Art Warentermingeschäft zu einem festen Preis veräußert. Diese damals ausgeübten Termingeschäfte bezeichnet man heute als Forward-Kontrakte. Das sind Geschäfte, bei denen Lieferung und Abnahme zu einem bei Geschäftsabschluss festgelegten zukünftigen Termin erfolgen. Der Preis der zugrunde liegenden Vermögensgegenstände wird bei Abschluss des Geschäfts festgelegt. Futures sind standardisierte und börsenmäßig gehandelte Terminkontrakte, die auf Zinsoptionen, Aktien oder Indizes abgeschlossen werden.

Ein Blick in die Antike zeigt, dass Termingeschäfte keine Erfindung unserer Zeit sind. So berichtete Aristoteles (*Politik* 1, 11), dass Thales von Milet eine ergiebige Olivenernte voraussah. Noch im Winter pachtete er sämtliche Ölpressen in Milet und Chios für einen geringen Betrag. Als dann die rechte Zeit kam und viele Ölpressen verlangt wurden, da verpachtete er sie teuer und gewann viel Geld.

Finanzderivate zur Absicherung und zur Spekulation

Finanz-Derivate sind Produkte, deren Preis sich von einem Basiswert (Aktien, Obligationen, Rohstoffe, Zinssätze) ableitet. Heutzutage prägen Derivate einen großen Teil der Finanzmärkte und üben einen enormen Einfluss aus. Man kann sich mit ihnen einerseits gegen das Auf und Ab von Marktpreisen absichern und andererseits besteht die Möglichkeit der Nutzung von Derivaten zur Ertragsoptimierung. Sie können wohltuend wie eine Versicherung sein.

Der Einsatz von Derivaten gehört auch zur Anlagestrategie der Hedge-Funds. Das Betätigungsfeld der Hedge-Funds umfasst alles auf dem Kapitalmarkt, womit man Geld verdienen kann. So können Hedge-Funds durch Leerverkäufe und Termingeschäfte auch bei fallenden Börsen Gewinne erzielen.

Die Geschichte der Hedge-Funds ist eng mit Marktkorrekturen verbunden. Ein unrühmlicher Fall war der Beinahekollaps von „Long Term Capital Management" (LTCM) im Rahmen des russischen Schuldenmoratoriums 1998, zu dessen Partnern die Nobelpreisträger Myron Scholes und Robert Merton (s.u.) gehörten.

> Die Idee der Hedge-Funds geht auf Alfred Winslow Jones (1901 -1989) zurück, der 1949 den ersten Hedge-Fund im heutigen Sinne begründete. Er recherchierte über die Möglichkeiten, Markttrends vorherzusagen. Dabei kam er zu dem Schluss, dass zuverlässige Prognosen über Marktentwicklungen nicht möglich sind. Neu waren an dieser Anlagegesellschaft Leerverkäufe (Short Selling) und Fremdkapitalaufnahme (Leverage).

Optionspreismodell nach Black-Scholes

Ein amtlich geregelter Optionshandel setzte erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts ein (USA). Heute versucht man für Optionen den sogenannten „fair value“ mit Hilfe theoretischer Modelle zu finden. Anfang der siebziger Jahre des 20. Jahrhunderts stellten die Amerikaner Fischer Black und Myron Scholes ein Optionspreismodell vor. Eine von Scholes, Black und Merton entwickelte Formel sollte den Handel mit Finanzderivaten im heutigen Sinn ermöglichen. Für die Formel, die dem Black-Scholes-Modell zugrunde liegt, wurde 1997 der „Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften“[4] an Robert Merton und Myron Scholes verliehen (Black war 1995 verstorben). Nachstehend wird eine Formel für die Bewertung einer europäischen Call-Option C vorgestellt:

$C = S_0\,\Phi(d_1) - K\,e^{-rt}\,\Phi(d_2)$, wobei
$d_1 = [\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)\,t] / (\sigma\sqrt{t})$
$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$ und
$\Phi(x)$ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

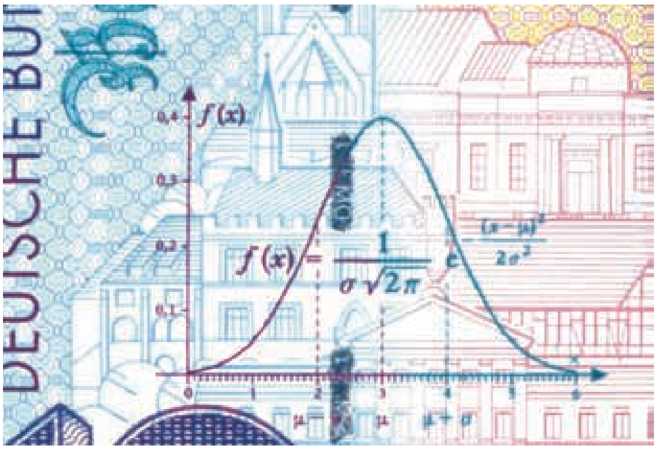
S_0: Aktueller Preis der Kaufoption
K: Basispreis
r: Zinssatz
t: Restlaufzeit
σ: Volatilität (Standardabweichung).

Ein Rechenbeispiel mit den folgenden Ausgangsgrößen mag zur Veranschaulichung beitragen.
S_0: 100 €, K: 95 €, Zins: 2 %, Volatilität: 20 % und die Laufzeit 1/2 Jahr.

Mit den Rechenergebnissen d_1 (0,50) und d_2 (0,36) werden die tabellierten Werte der Verteilungsfunktion Φ (x) der Standardnormalverteilung N(0,1) gewonnen; sie lauten 0,6915 bzw. 0,6406. Diese werden sodann in die oben stehende Formel eingesetzt. Das Ergebnis für den Preis der Option beläuft sich auf 8,90 €. Demgegenüber errechnen sich bei einer Volatilität von 10 bzw. 30 % folgende Optionspreise: 6,66 bzw. 11,80 €.

Bei diesem Bewertungsmodell wird u.a. vorausgesetzt, dass Kursveränderungen normal verteilt sind und sich die Volatilität während der Laufzeit nicht ändert. An diesem Modell übte Benoît Mandelbrot, der den Begriff „Fraktal“[5] prägte, Kritik. Er brachte zum Ausdruck, dass sich Preise diskontinuierlich entwickeln und Kursschwankungen nicht normal verteilt sind. Dies ist für ihn der Grund, dass die moderne Finanzmathematik in diesen Märkten nicht funktionieren kann. „Die Mathematik von Bachelier, Markowitz, Sharpe und Black-Scholes unterstellt jeweils einen kontinuierlichen Übergang von einem Kurs zum nächsten. Ohne das funktionieren ihre Formeln einfach nicht.“, so Mandelbrot[6] in *Fraktale und Finanzen*, S. 324.

Vor der Einführung des Euro fand man auf der 10-DM-Note das Bildnis von Gauß nebst der Normalverteilungskurve, auch Glockenkurve genannt (siehe folgende Abbildung).



In diesem Kontext sei auf die Ausführungen zur Normalverteilung von Günter Menges in seinem Buch *Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie* hingewiesen; siehe Abschnitt § 49,4 „Naturgesetz oder Ideologie?“, Seite 248. Menges zitierte dabei auch R.C. Geary, der 1947 schrieb: „Normality is a myth: there never was, and never will be, a normal distribution.” [Testing for Normality. Biometrika, 34 (1947), S. 241].

Mathematische Modelle zur Berechnung von Prämien für Optionen gab es bereits Jahrzehnte vor der Publikation der „Black-Scholes-Formel“. Louis Bachelier (1870 - 1946), der 1900 seine Dissertation *Théorie de la Spéculation* vorlegte, gilt als der Begründer der modernen Finanzmathematik.

Mit einem erstaunlichen Beitrag wartete die „Neue Zürcher Zeitung“ in ihrer Ausgabe vom 8. Oktober 2005 auf: *Ein vergessener genialer Wurf zur Bewertung von Optionen. Vinzenz*

4 Dieser Preis wird nicht von Alfred Nobels Stiftung getragen, sondern von der schwedischen Reichsbank (seit 1969).
5 Für die Entwicklung seiner fraktalen Geometrie der Natur erhielt B. Mandelbrot 1985 die Barnard-Medaille der Columbia-Universität, eine sehr seltene Auszeichnung.
6 Die Deutsche Bundesbank lud für den 9. November 2005 zu einer Vortragsveranstaltung ein, bei der Professor Benoît B. Mandelbrot zum Thema „What do Noah and Joseph have to do with the Financial Markets?“ sprach. Siehe auch den Beitrag „Joseph, Noah und das moderne Risikomanagement: Fachkonferenz der Bundesbank zu Ehren des Mathematikers Benoît Mandelbrot“ in der F.A.Z. vom 15. November 2005.

Bronzin nahm die nobelpreiswürdige Black-Scholes-Formel vorweg. Die weitgehend unbekannt gebliebene Publikation von Vinzenz Bronzin *Theorie der Prämiengeschäfte* erschien 1908 in Wien.

Statistische Methoden für ökonomische Zeitreihen

Die bereits erwähnte Krise des Hedge-Fund LTCM, die das Finanzsystem bedrohte, zeigt den fehlenden Schutz vor einem Ausrutscher auf dem glatten Parkett der Finanzmärkte. Mit Kapitalmarktmodellen beschäftigen sich viele Forscher. Im Jahr 2003 wurden Robert F. Engle und Clive W.J. Granger für Methoden zur Analyse ökonomischer Zeitreihen ausgezeichnet. Sie entwickelten in den 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts Methoden zum besseren Umgang mit zwei entscheidenden Eigenschaften vieler Zeitreihen: zeitlich veränderliche Volatilität und Nichtstationarität.

Das englische Akronym ARCH (Auto-Regressive Conditional Heteroscedasticity) geht auf Robert Engle zurück und heißt „autoregressive bedingte Heteroskedastizität“. Das Modell wurde erweitert und erhielt den Namen GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity).

Der von der Schwedischen Reichsbank in Erinnerung an Alfred Nobel gestiftete Preis für Wirtschaftswissenschaften des Jahres 2003 wurde aufgeteilt zwischen
Robert F. Engle
„für Methoden zur Analyse ökonomischer Zeitreihen mit zeitlich variabler Volatilität (ARCH)“ und
Clive W. J. Granger
„für Methoden zur Analyse ökonomischer Zeitreihen mit gemeinsam veränderlichen Trends (Kointegration)“.

Genannt sei abschließend noch einmal das im Jahr 2005 erschienene Buch *Fraktale und Finanzen: Märkte zwischen Risiko, Rendite und Ruin*, das Mandelbrot in Zusammenarbeit mit Richard L. Hudson verfasste. Bekanntlich kritisiert Mandelbrot die traditionellen und gängigen Modelle des Risikomanagements.
Risiken sind im Allgemeinen schwer kalkulierbar und Risikomodelle weisen Schwächen auf. Zum Geschehen an den Kapitalmärkten sei bemerkt: Die Handlungen der Börsenteilnehmer bleiben von den vergangenen und augenblicklichen Ereignissen nicht unbeeinflusst. Ein Vergleich mit dem Spiel: der Würfel hat kein Gedächtnis.
Das Phänomen des Herdenverhaltens in Finanzmärkten ist seit langem bekannt. Seit einigen Jahren sucht man nach geeigneten Modellen, um aus diesen Wissen Prognosen abzuleiten. Der Geophysiker Didier Sornette versucht sein Erdbebenmodell auf den Kapitalmarkt zu übertragen, den er ebenfalls als Netzwerk interpretiert.

Sir Isaac Newton (1643 - 1727) soll sich zu Börsenkursen etwa so geäußert haben: „Ich kann den Weg der Himmelskörper genau berechnen, aber nicht, wie hoch oder tief eine verrückte Menschenmenge die Börsenkurse treiben kann.“ Zur Rationalität oder Irrationalität der Börsen sei bemerkt, dass sie in der Konjunkturprognose gute Dienste leisten können. Immerhin werden an der Börse Zukunftserwartungen gehandelt.

„Ich lese keine Zeitung. Was wirklich wichtig ist, erfahre ich an der Börse.“, eine Äußerung vom Bankier Amschel Meyer Rothschild (1818 - 1874).

Der Chief Investment Officer für das Fondhaus Templeton, Jeffrey A. Everett, beantwortete in einem Gespräch mit „Finanz und Wirtschaft“ (6. Oktober 2004) die selbst gestellte Frage „Wie viele Ökonomen finden Sie unter den 400 reichsten Amerikanern?“ so: „Keinen einzigen“.

Sparkassenwesen für Zeiten des Alters und der Not

Die Sparkassen entstanden als private humanitäre Anstalt zur Weckung des Sparwillens der Arbeiter und sozial schwachen Volksschichten in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts; die erste 1778 in Hamburg.
Ein Sparkassenpionier im 19. Jahrhundert war Friedrich Benedikt Wilhelm von Hermann (1795 - 1868), der u. a. auch Vorstand des Bayerischen Statistischen Bureaus war. Inspiriert wurde v. Hermann durch Ideen aus Frankreich und England. „Die ersten Vorschläge zur Errichtung einer Sparkasse in Bayern gehen auf den Sparkassenpionier aus Zürich, Johann Kaspar Brunner zurück, …“ schreibt Hannes Ludyga in seinem Beitrag *Hermann. Ein Sparkassenpionier im 19. Jahrhundert.* Bei Ludyga findet sich der nennenswerte Satz: „Neben der Errichtung von Leihanstalten und Sicherungsverbänden für Handwerker und Dienstboten empfahl die Verordnung auch Sparkassen für Zeiten des Alters und der Not (Königlich-Baierisches Regierungsblatt 1816, München, Sp. 801).“

Die Themen Zinseszins und Renten behandelte von Hermann in seinem *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht.* So findet sich darin folgende Rechenaufgabe: „Einer zahlt 24 Jahr lang in eine Wittwenkasse am Ende jedes Jahres 24 fl.; wie lang kann die Kasse, ohne Nachtheil der Wittwe, eine Rente von jährlich 150 fl. zahlen?", gegeben waren 5 % Zins (Ludwig Bauer).

Zur Lösung in Kürze: Die Rentenzahlung kann ca. 9 Jahre erfolgen.

Anfänge des Bankwesens

Zur Abrundung des historischen Streifzugs zum Geldwesen folgt ein kurzer Abriss über die Anfänge der Bankgeschäfte.

Geld- und Naturalienverleih gegen Zinsen war Anfang des 2. Jahrtausends vor Chr. zu einem großen Teil eine Domäne der Kaufleute, weil nur diese über das notwendige freie Kapital verfügten. So kann man es in der Schrift *Die Babylonier* von Michael Jursa (München 2004) lesen.

Von Bankgeschäften zeugt ein im Pergamonmuseum Berlin aufbewahrtes Reskript eines Kaisers (wahrscheinlich Hadrian, 117 - 138) an die Pergamener. Vom Untermarkt in Pergamon (Kopie). „Auf Grund von Beschwerden pergamenischer Geschäftsleute untersagt der Kaiser der Bank von Pergamon, die über das Monopol des Geldwechsels verfügt, die Fortführung verschiedener ungerechtfertigter Praktiken gegenüber ihren Kunden."

Im alten Rom war der Sitz der Geldhändler der mittlere Janusbogen. In den *Satiren* (2,3,18) von Horaz ist zu lesen: „Seit am mittleren Janus zerbrochen all mein Vermögen, besorg ich fremde Geschäfte, der eigenen ledig."

Es gab Zeiten, in denen das Leihen und Verleihen von Geld etwas fragwürdig erschien. Zweifelsfrei lebt(e) dieser Geschäftszweig immer vom Vertrauen. In Ciceros (106 - 43) Schrift *De officiis* (Vom pflichtgemäßen Handeln) zählen neben den Zöllnern auch die Geldverleiher zu den Erwerbszweigen, die sich der Ablehnung der Menschen aussetzen (I 42,150).

Über seinen Freund C. Vestorius, Bankier aus Puteoli, berichtete Cicero: „Diese Zeilen schreibe ich am 22. [Puteoli, den 22. April 44 v. Chr.], während ich bei Vestorius zu Tische liege, einem Mann, der weit entfernt von Disputierkunst, aber genug geübt beim Rechnen ist."; vgl. Cicero: *Epistulae ad Atticum* (Briefe an Atticus) XIV, 12, 3; ausgewählt, übersetzt und herausgegeben von Dietmar Schmitz.

Von jedem römischen Bürger und von jedem gebildeten Sklaven wurde die Beherrschung des Währungssystems erwartet. Eine kleine Szene aus der Erziehung der Jugend schildert Horaz (65 - 8 v. Chr.) in *Ars Poetica* (Die Dichtkunst 325 - 330): „Römische Knaben erlernen, in langwieriger Rechnung ein Ganzes in hundert Teile zu teilen. ‚Der Sohn des Albinus geb' Antwort: wenn man von fünf Zwölfteln ein Zwölftel abzieht, was bleibt? Heraus mit der Sprache!' ‚Ein Drittel.' ‚Richtig. Du wirst dein Geld zusammenhalten können. Ein Zwölftel addiert, was gibt das?' ‚Ein Halb.'" (Übers. von Eckart Schäfer).

Im Nachwort zu Ciceros *Briefe an Atticus* führt Dietmar Schmitz unter Berufung auf W. Hankel aus, dass die Römer ihre weltpolitische Bedeutung nicht nur ihren militärischen Erfolgen verdanken, sondern auch ihrer Geld- und Kreditwirtschaft. Schließlich verliefen Aufstieg und Niedergang Roms zeitgleich mit dem Aufstieg und Niedergang der Geldwirtschaft. „300 Jahre lang gab es im römischen Reich keine Inflation, da die im Umlauf befindlichen Münzen nicht nur Zahlungsmittel waren, sondern auch der Kapitalbildung dienten." „Cicero erweist sich als Finanzspezialist und vermag in der Provinz zwischen Gläubigern und Kreditgebern geschickt zu vermitteln."

„Für die finanziellen Verhältnisse der Soldaten war dadurch Sorge getragen, dass bei jeder Cohorte der Legion unter Aufsicht des *signifer* eine Sparkasse (*follis)* angelegt war, …", vgl. Marquardt, Joachim: Römische Staatsverwaltung, Bd. 2. Darmstadt 1957, S. 562 (Nachdr. der 2. Aufl. von 1881).

Das abendländische Bankwesen begann mehr mit dem Münzwechsel-Geschäft. Im Abendland nahm das Geldwesen in Italien, wo der Handelsaustausch besonders rege war, seinen Ausgang. An dieser Stelle sei der Artikel *Die Gangs von Florenz: Zwei Ausstellungen zeigen das Janusgesicht der italienischen Renaissance* von Dietmar Polaczek in der SZ vom 18. März 2004 genannt. Dort wird auch vom Pech der Bankiersfamilie Bardi berichtet, weil Eduard III. (reg. 1327 - 1377) die Millionenkredite im *Hundertjährigen Krieg* nicht zurückzahlte.

Wurzeln des modernen Bankwesens

Als Ursprung der modernen europäischen Bank kann die Geschäftstätigkeit der Geldwechsler des mittelalterlichen Italien angesehen werden (Meyers Konversationslexikon). Aus dem Geldwechselgeschäft entwickelten sich bald auch ein Depositen- und Wechselgeschäft sowie ein Giroverkehr.

Wirtschaftlich hatte das Italien der Renaissance eine führende Stellung in Europa. Seit dem 13. Jahrhundert hatte u. a. der Orienthandel und die Entwicklung einer frühkapitalistischen Handels- und Finanzwirtschaft zur Renaissance übergeleitet.

Florenz erlangte im westeuropäischen Wirtschaftsleben seit dem 13. Jahrhundert durch seine Tuchindustrie und dann durch seine Bankiers eine führende Stellung. 1434 erlangten die Medici die Herrschaft über Florenz. Unter den ersten Medici, Cosimo (1389 - 1464) und Lorenzo il Magnifico (1449 - 1492), wurde Florenz der geistige Mittelpunkt des italienischen Humanismus und der italienischen Renaissance. Die Fäden der europäischen Finanzgeschäfte liefen damals am Arno zusammen. Der große Geldbedarf der rivalisierenden Königshäuser führte ab dem 16. Jahrhundert dazu, dass sich in Europa eine Bankbranche entwickelte (Erich Zoller in seinem Beitrag *Kriege werden immer mit fremden Mitteln bezahlt* in „Finanz u. Wirtschaft“ vom 2.4.2003).

Die Fugger, das größte europäische Bankhaus des Frühkapitalismus

Mit viel Geschick betrieb Jakob Fugger II der Reiche (1459 - 1525) den Handel, den er in Venedig gelernt hatte. Schon 1505 bezog er ostindische Waren auf dem neu entdeckten Seeweg um Afrika. Auf einem 1518 in Augsburg geprägten halben Guldiner wurde der mächtige Wirtschaftsmagnat und Bankier verewigt. Durch ihn wurden die Fugger das größte europäische Bankhaus des Frühkapitalismus. Er gewährte nicht nur den Kaisern Maximilian I. und Karl V. umfangreiche Kredite. Jakob II beerbten seine Neffen Georg Raymund (1489 - 1535) und Anton (1493 - 1560). Die enge Verbindung mit dem Kaiser brachte ihnen allerdings durch die Zerrüttung der spanischen Finanzen schwere Verluste. Karl V. konnte die vom Hause Fugger geliehenen Summen nicht zurückzahlen. Zur Befreiung des Kaisers von seiner Schuld heißt es in Meyers Konversations-Lexikon von 1894: „Von Anton erzählt man die thörichte Anekdote, dass er die Wechsel des Kaisers an einem Zimtfeuer verbrannt habe.“

Ein begehrtes Anlagepapier war der Fuggerbrief. An der Börse von Antwerpen nahmen die Fugger Geld zu einem Zinssatz von etwa zehn Prozent auf und gaben es zu etwa fünfzehn Prozent weiter.

Eingefügt sei hier ein Hinweis auf den Aufsatz von Martin Hille *Schneller als Brieftauben: Augsburg war einst das Nachrichtenzentrum des Kontinents*, vgl. *Unser Bayern*. Heimatbeilage der Bayerischen Staatszeitung, Jahrgang 53 Nr. 11, November 2004.

Nach dem Tod von Anton Fugger übernahm Johann Jakob Fugger die Leitung der Gesellschaft. An den Kapitalmärkten nahm er mehr Geld auf, als es die Finanzlage des Hauses eigentlich zugelassen hätte.[7] So musste der von Schulden Bedrängte 1571 die kostbare Büchersammlung an Herzog Albrecht V. von Bayern verkaufen. Dieser hatte auch die Bibliotheken des Nürnberger Weltgeschichtsschreibers Hartmann Schedel und die des Orientalisten Johann Albrecht Widmanstetter erworben. Über diesen Bücherbestand verfügt heute die bayerische Staatsbibliothek, eine der großen, alten europäischen Bibliotheken.

Die Gründung von Banken bis zum 18. Jahrhundert

Durch die Ausbreitung des Handels und den Geldbedarf des absoluten Fürstenstaates kam es zwischen dem 15. und 18. Jahrhundert zu umfangreichen Bankgründungen. Bei diesen Einrichtungen, die zum Teil vom Staat gefördert wurden, war die Übernahme des Giroverkehrs oft mit dem Recht zur Notenausgabe verbunden. Die bekannteste Gründung dieser Art war die des Schotten John Law (1671 - 1729) in Frankreich. Nach dem Tod Ludwigs XIV. (der die Staatsfinanzen völlig zerrüttet hatte) gründete 1716 John Law in Paris die private Notenbank ‚Banque Générale‘ (seit 1718 als ‚Banque Royale‘ Staatsnotenbank). 1720 wurde Law Generalkontrolleur der Finanzen. Nach Meyers Konversationslexikon beruhte sein System auf der Ansicht, „[Papier]geldüberfluss fördere den öffentl. Wohlstand, und dieser wiederum diene der Vermehrung der öffentl. Macht und des öffentl. Reichtums.“ Anfangs gelang es ihm auch, die Staatsschuld zu vermindern; Intrigen und Spekulationen, die sich allerdings nicht auf Law zurückführen ließen, führten 1720 zum Zusammenbruch der Bank (erste Papiergeldinflation).

Die Bank von England wurde 1694 durch den Zusammenschluss mehrerer großer Kaufleute zur Aufbringung eines Staatskredits gegründet. Neben der 1668 gegründeten Schwedischen Reichsbank zählt sie zu den ältesten Zentralbanken (Notenbanken).

In Deutschland wurde das Kreditgeschäft anfangs fast nur von Privatbankiers ausgeübt. „Die meisten Privatbankhäuser lebten immer noch überwiegend vom Geldwechselgeschäft, nur wenige bedeutendere unter ihnen, wie Rothschild und Mendelssohn, vergaben auch schon Kredite, handelten mit Wertpapieren und placierten Staats- und Eisenbahnanleihen.“ (Hans Otto Eglau).

7 Die römisch-deutschen Kaiser bekamen von den Fuggern auch dann noch Geld, als diese sich längst darüber im Klaren waren, dass der abgezinste Erwartungswert der Rückzahlung ihres Kredits fast null war (Mario Koglin 2005).

Auf die im 19. Jahrhundert gegründeten Rentenbanken wird hier nicht eingegangen. Aufgeführt sei der Pfandbrief, der sich als idealer Schuldschein erwies. Eingeführt wurde dieser von Friedrich dem Großen im Jahr 1770. Nach den großen Staatsbankrotten des 16. und 17. Jahrhunderts gaben die Bankiers nur gegen Sicherheiten Gelder.

Aktienbanken infolge Industrialisierung im 19. Jahrhundert

Bei der Unternehmensfinanzierung spielten Banken zu Beginn des 19. Jahrhunderts noch so gut wie keine Rolle. „Als Friedrich Krupp 1811 in Essen seine Gußstahlfabrik gründete, lieh er sich das nötige Startkapital bei seiner Mutter und seinen Geschwistern“ (Lothar Gall, S. 26). Mit der Gründung der AEG begann in Deutschland 1887 die Industriefinanzierung. „Die AEG wurde 1887 als rein durch Banken finanzierte Aktiengesellschaft auf breiter Kapitalbasis gegründet.“ (Lothar Gall, S. 38).

Einheitliche Währungen

Eine landesweit gültige Währung – die Mark – wurde wenige Jahre nach der Gründung des Deutschen Kaiserreichs im Jahr 1871 eingeführt. Ziel war die Vereinheitlichung der verschiedenen Währungssysteme. Davon gab es damals in Deutschland mindestens sieben. Als der Euro die Deutsche Mark am 1. Januar 2002 ablöste ging es wieder um Vereinheitlichung. Im Rahmen der europäischen Einigung haben sich elf Länder zu einer gemeinsamen Währung entschlossen.

Wie Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) zum Papiergeld stand, hat W. Sartorius von Waltershausen in seiner Schrift *Gauß zum Gedächtnis* festgehalten: „Alles Papiergeld hielt er für den Credit der Staaten für sehr gefährlich, da die Regierungen in den Tagen der Noth sich gar zu leicht verleiten ließen ihre Kräfte zu überschätzen und er billigte es, dass unser Land mit der Einführung des Papiergeldes bis jetzt verschont worden sei.“

Die ältesten Banken

Die noch heute bestehende älteste Bank der Welt ist die 1472 gegründete Banca Monte dei Paschi di Siena.

Die Privatbank Joh. Berenberg, Gossler & Co. KG bezeichnet sich als die älteste Bank Deutschlands. Sie führt ihren Ursprung auf das Jahr 1590 zurück, als die Brüder Hans und Paul Berenberg eine Firma für Tuchhandel und Import-/Exportgeschäfte in Hamburg gründeten. Nach eigenen Angaben erfolgte die Aufnahme von Bankgeschäften allerdings erst im 18. Jahrhundert (vgl. S. 6, Berenberg Bank, Geschichte eines deutschen Privatbankhauses). 1932 zog sich die Firma aus dem aktiven Bankgeschäft zurück. Nach dem Ende des Zweiten Weltkrieges wurde das aktive Bankgeschäft am 21. Juni 1948, dem Tage nach der Währungsreform, wieder aufgenommen (vgl. a.a.O.).

Über einen sensationellen Archivfund bei einer Recherche der Fürst Fugger Privatbank wurde im vergangenen Jahr in der Schrift *Fugger Briefe* (Ausgabe Nr. 2/2006) berichtet (s. S. 140). Diese enthält einen Beitrag von Dr. Christl Karnehm mit dem Titel *Das Haus Fugger – schon seit dem Jahr 1486 als Bank tätig*. In diesem Aufsatz heißt es u.a. „Die früheste Bezeichnung als ‚Bank’ ist nun für ein deutsches Unternehmen mit Originaldokument belegt.“ Das Dokument – ein Schreiben des Rats der Stadt Augsburg vom 27. Dezember 1486 – wird im Stadtarchiv Augsburg (Bestand: Reichsstadt, Schätze Nr. 105, VIII b, fol. 1 r) aufbewahrt.

Bonmots zum Thema Geld

Der französische Staatsmann Charles Maurice de Talleyrand (1754 - 1838) sah im Geldmangel durchaus Positives: „Geldmangel ist ein Segen. Niemand vermag zu sagen, wie viele politische Dummheiten durch Mangel an Geld schon verhindert worden sind.“

Sein Zeitgenosse Antoine de Rivarol (1753 - 1801), eigentlich Rivaroli, berühmt durch den geistreichen Witz seiner Aphorismen und Bonmots, prägte den Ausspruch: „Manche Leute haben von ihrem Vermögen nur die Furcht, es zu verlieren.“

Der ironische Satz „Ihr Geld ist nicht weg, es hat nur ein anderer.“ wird dem Bankier James Mayer de Rothschild zugeschrieben.

Ein erwähnenswerter Satz von Michel de Montaigne (1533 - 1592) lautet: „Alles in allem kostet es mehr Mühe, Geld zu bewahren, als es zu erwerben.“

Wie lautete der Ratschlag eines bekannten Rabbiners? „Kaufet nicht verkaufet“ – das Komma muss jeder selber setzen!

Geldpolitik zu betreiben, sei eher Kunst denn Wissenschaft, lautet ein Bonmot.

Auf Benjamin Franklin (1706 - 1790) geht der Satz „Willst du den Wert des Geldes erkennen, versuche dir welches zu borgen.“ zurück.

Literaturnachweis

Bauer, Ludwig: Hermanns „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht“ In: Manfred Pix (Hrsg.): Friedrich Benedikt Wilhelm von Hermann (1795 - 1868): Ein Genie im Dienst der bayerischen Könige. Politik, Wirtschaft und Gesellschaft im Aufbruch. München 1999. S. 497 ff.

Bernoulli, Jakob: Die Werke von Jakob Bernoulli. [Wahrscheinlichkeitsrechnung] / [bearb. von Barthel L. van der Waerden] / Bd. 3. Hrsg. von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Basel 1975.

Braun, Heinrich: Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik. Berlin 1963.

Eglau, Hans Otto: Wie Gott in Frankfurt: Die Deutsche Bank und die Deutsche Industrie. Düsseldorf ... 1989.

Gall, Lothar: Die Deutsche Bank von ihrer Gründung bis zum Ersten Weltkrieg 1870 - 1914. In: Die Deutsche Bank 1870 - 1995 / von Lothar Gall … . München 1995.

Klengel, Horst: Hammurapi von Babylon und seine Zeit. Berlin 1978.

Ludyga, Hannes: Hermann. Ein Sparkassenpionier im 19. Jahrhundert. In: Manfred Pix (Hrsg.): Friedrich Benedikt Wilhelm von Hermann (1795 - 1868): Ein Genie im Dienst der bayerischen Könige. Politik, Wirtschaft und Gesellschaft im Aufbruch. München 1999. S. 385 ff.

Mandelbrot, Benoît B. und Hudson, Richard L.: Fraktale und Finanzen: Märkte zwischen Risiko, Rendite und Ruin. München 2005.

Marquardt, Joachim: Römische Staatsverwaltung. Bd. 2 (Das Finanzwesen). 3. Aufl., unveränd. fotomechanischer Nachdr. der 2. Aufl. von 1881 / besorgt von H. Dessau ... . Darmstadt 1957.

Ogris, Werner: Der mittelalterliche Leibrentenvertrag. Wien München 1961.

Pacioli, Luca: Abhandlung über die Buchhaltung 1494 / Luca Pacioli. Nach dem ital. Orig. von 1494 ins Deutsche übers. und mit einer Einl. über die ital. Buchhaltung im 14. und 15. Jh. und Paciolis Leben und Werk versehen von Balduin Penndorf. Stuttgart 1933.

Stevin, Simon: La Pratique d‘Arithmetique. In: L‘Arithmetique. Leyden 1585.

Wyler Julius: Die Tontinen in Frankreich. München; Leipzig 1916, S. 4.

Historisches zum Zins und ein Querschnitt zum geometrischen Wachstum

Im Mittelpunkt von Finanzangelegenheiten steht der Zins, einer der zentralen Preise einer Volkswirtschaft. Der Preis für die leihweise Überlassung von Kapital hat eine bewegte Geschichte aufzuweisen: erlaubt und verboten. Im Kampf der Geldbedürftigen mit den Geldbesitzenden war und ist der Zinssatz (Zinsfuß) essentiell. Zins, Barwert und Endwert sind beim Vergleich von Geldgeschäften wichtige Kennzahlen. Zinsfuß und die mittlere Lebenserwartung prägen die Höhe einer Leibrente. Ehe man sich für ein Leibrentengeschäft entscheidet, kann man mit Hilfe der Zinseszinsrechnung noch alternative Berechnungen anstellen. So kann mit den gegebenen drei Größen (Höhe der Leibrente, vereinbarter Zinsfuß und durchschnittliche Lebenserwartung des Rentenempfängers) für Vergleichszwecke der anfängliche Darlehensbetrag (Anfangswert) bestimmt werden. Mit den genannten Ausgangsdaten lässt sich andererseits der Endbetrag einer periodischen Kapitaleinzahlung (Sparprogramm) ermitteln. Durch das Abzinsen (Diskontieren) werden Geldbeträge, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallen, vergleichbar. Die Entdeckung der Logarithmen ermöglichte die Berechnung des Zinssatzes aus den gegebenen Größen Anfangsbetrag, Endbetrag und Anzahl der Zahlungstermine. Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik sind bekanntlich eine Sterbetafel und die Zinseszins- und Rentenrechnung.

Vorbemerkungen

Beim Aufbau einer zusätzlichen Altersversorgung in jungen Jahren sollte der Zinseszinseffekt nicht unterschätzt werden, von den „Zehrern“ Steuern und Inflation einmal abgesehen.
Schon immer haben finanzielle Dinge im menschlichen Leben einen breiten Raum eingenommen, wobei dem Zins eine zentrale Rolle zufällt. Mit einem Blick in die Historie von Zins und Zinseszins befasst sich dieser Beitrag. Daneben wird das Thema „Geometrisches Wachstum und Zins“ angerissen. Dabei wird sich auch zeigen, wie es sich mit dem Zinseszinseffekt verhält.

Beachtung verdient die besondere Zahl e (Basis der natürlichen Logarithmen), deren erste Anfänge im 17. Jahrhundert auszumachen sind. Die vielen Anwendungsmöglichkeiten dieser Zahl zeigen die Begriffe „Zinseszinsfunktion“ oder „Gesetz des organischen Wachstums“. Dieser Zahl begegnet man auch im „Gompertz’schen Gesetz“, das dem Verlauf der Sterblichkeit im hohen Alter näherungsweise entspricht.

Eine Vielzahl von alltäglichen Problemen haben mit Populationsentwicklungen zu tun. Gestreift wird eine Population, deren Verhalten recht einfach ist. Gemeint ist eine solche von Euros auf einem Bankkonto. Beleuchtet wird auch das Verhalten eines Sparkontos im Zusammenhang mit einer logistischen Gleichung, die interessante Eigenschaften aufweist.

Zinsen waren schon den Babyloniern vertraut

Gläubiger und Schuldner standen sich in der mesopotamischen Gesellschaft seit langem gegenüber (Horst Klengel: König Hammurapi und der Alltag Babylons. Zürich 1991). Im historischen Babylonien, eine der ältesten Hochkulturen der Menschheit, war der Begriff Zinsen schon bekannt. Nach Michael Jursa war Anfang des zweiten Jahrtausends vor Christus Geld- und Naturalienverleih gegen Zinsen zu einem großen Teil eine Domäne der Kaufleute.

Auf M. Crassus anspielend sagt Cicero (106 - 43 v.Chr.) in *Paradoxa stoicorum* (Stoische Paradoxien, VI 45): „Viele haben dich gehört, als du erklärtest, niemand sei reich, wenn er mit seinen Zinseinkünften nicht ein Heer ernähren könne, wozu das römische Volk trotz so gewaltiger Steuereinnahmen schon längst kaum noch in der Lage ist.“ (Rainer Nickel).

L. Annaeus Seneca (um 4 v. - 65 n. Chr.) schreibt in einem seiner Briefe (*ep*. 87,7): „quia magnus kalendari liber volvitur“ (weil ein großes Zinsbuch gewälzt wird).

Aus der Schrift *De ira* (Über den Zorn III 33,3) von Seneca sei folgende Stelle wiedergegeben (in das Deutsche übertragen von Dr. Helmut Zäh): „Was, wenn wegen eines Zinses, selbst von nur einem Zehntel Prozent (einem Tausendstel), ein kranker Wucherer, obwohl seine Füße gelähmt und seine Hände zum Raffen (comparandum) / zum Zusammenrechnen (computandum) nicht mehr imstande sind, schreit und mit Hilfe eines Zahlungsbefehls seine Pfennige (Asse) selbst bei akuten Krankheitsanfällen einfordert?“ [1]

„Der Zinswucher war ein altes Übel in Rom und bildete die häufigste Ursache von Aufruhr und Zwietracht“ schrieb Tacitus (etwa 55 - 116) in seinen *Annalen* (VI 16).

Spuren der Wirtschaftskunde findet man schon im griechischen Altertum. Der griechische Philosoph Aristoteles (384 - 322), Schüler von Platon und Lehrer von Alexander dem Großen, nahm in *Politik* Stellung zum Zins (tokos). So heißt es im Ersten Buch: „und so ist auch der Zins wieder Geld vom Gelde.“ Das griechische Wort τόκος bedeutet: a) das Gebären, Geburt. b) Nachkommenschaft, Kind(er). c) Gewinn, Zinsen. Die Philosophie von Aristoteles ist für das Abendland sehr einflussreich gewesen. Albertus Magnus (um 1193 - 1280) machte die Werke von Aristoteles dem christlichen Abendland zugänglich. Thomas von Aquin (1225 - 1274), ein Schüler von Albertus Magnus, bevorzugte in der Philosophie Aristoteles. Er stellte die Frage nach der Berechtigung des Zinses. Das kanonische Zinsverbot wurde so begründet: „Geld kann keine Jungen werfen“ (nummus non parit nummos). Gegen das Zinsnehmen sprach sich auch Martin Luther (1483 - 1546) aus. Gegen das Zinsverbot wurde aber immer wieder verstoßen.

Lombarden wurden nicht nur die Bewohner der Lombardei genannt. Mit diesem Wort bezeichnete man im späteren Mittelalter die Geldwechsler und Pfandleiher, die ursprünglich aus Oberitalien kamen und neben den Juden Kreditgeschäfte gegen Zins übernahmen. Bekannt ist die Lombard Street in der Innenstadt von London, Sitz großer Banken. Heute sind bedeutende Finanzinstitute im Londoner Geschäftsviertel Canary Wharf angesiedelt.

William Shakespeare (1564 - 1616) setzte mit Shylock im Schauspiel *Der Kaufmann von Venedig* dem Geldverleiher ein Denkmal. In der 1494 von Luca Pacioli veröffentlichten *Summa* wurde schon darauf hingewiesen, dass bei der Zinsrechnung der Monat zu 30 und das Jahr zu 360 Tagen gerechnet werden.

Im Mittelalter hießen in Italien die Staatsanleihen montes (Berge). Zur Bekämpfung des Wuchers entstanden, zuerst von kirchlicher Seite, die montes pietatis, die gegen Pfand billige Darlehen gaben.

An den Handelsplätzen der Welt war der Fuggerbrief ein begehrtes Papier. An der Börse von Antwerpen nahmen die Fugger Geld zu einem Zinssatz von etwa 10 % auf und gaben es zu etwa 15 % weiter (Stephan Finsterbusch in der F.A.Z. vom 6.7.1999, S. B 10).

In seinem Beitrag *Vom Credo zum Kredit* schrieb Christoph Albrecht in der F.A.Z. vom 29.8.2001: „Der betrügerische Bankrott ersetzte im 18. Jahrhundert den Tatbestand des Wuchers, der im Laufe des 17. Jahrhunderts außer Gebrauch gekommen war. Denn die neuen Bankrott-Regeln zielten nicht länger auf die Gläubiger, sondern auf die Schuldner.“ Der Autor sieht den Grund dafür in der Ausweitung des internationalen Handels auf der Basis von Wechseln, die Kaufleute im 17. Jahrhundert wie eine Währung nutzten. Wechsel dienten als eine Form von Papiergeld. Regelwerke wie die *Leipziger Wechselordnung* von 1681 sollten sicherstellen, dass Wechsel, Buch- und andere Schulden zum Verfallstermin prompt bezahlt würden. „Diese Wechselordnungen sanktionierten unausgesprochen die bis dahin verpönten Zinsgeschäfte.“

Der Bankier Hermann Josef Abs (1901 - 1994), u.a. Leiter der deutschen Delegation bei der Londoner Schuldenkonferenz (1953), soll einmal sinngemäß geäußert haben, dass er mit sich über die Höhe des Zinses reden lasse, wenn das Darlehen nicht zurückgezahlt werden muss.

Zins auf Zins

Unter Zinseszins versteht man gewöhnlich die Verzinsung des Zinses bei einem während mehrerer Jahre angelegten Kapital. Für das Nehmen von Zinseszins war das Wort Anatozismus gebräuchlich (griech. aufhäufen). Nach dem *Kleinen Stowasser* bedeutet anatocismus „Zins auf Zins“. Das Zinsverbot wurde allerdings durch eine Reihe von Ausnahmen durchbrochen.

1 Dr. Zäh weist darauf hin, dass das Wort „computandum“ nicht in den mittelalterlichen Seneca-Handschriften überliefert ist, sondern die Konjektur eines späteren gelehrten Herausgebers ist. Überliefert ist in den Handschriften statt dessen „comparandum“. Was Seneca tatsächlich geschrieben hat, wird sich vermutlich nie mehr eindeutig klären lassen.

Nach Michael Jursa war in Babylonien das Konzept von Zinseszinsen bekannt, sie wurden aber selten erhoben. Zinseszinsaufgaben lösten die Babylonier mit Hilfe von Zweierpotenzen. Zu einem bemerkenswert genauen Ergebnis gelangten sie bei einer Zinseszinsaufgabe, bei der die Zeit als Unbekannte auftrat. Im Louvre wird eine Tafel aufbewahrt, die Erstaunen hervorruft. Diese stammt aus der Zeit um 1700 vor Chr. und weist die folgende Frage aus: Wie lange dauert es, bis sich ein Geldbetrag verdoppelt, wenn jährlich Zinsen von 20 % berechnet werden, vgl. Eves, Howard W.: An introduction to the history of mathematics. Philadelphia …1983. Da kein Anfangsbetrag angegeben wurde, lässt sich das Problem in heutiger Schreibweise wie folgt darstellen: $1{,}2^x = 2$.
Die Lösung der Babylonier lautet in dem von ihnen benutzten Sexagesimalsystem (Zahlsystem mit der Basis 60): 3; 47, 13, 20. Das bedeutet in dezimaler Darstellung x = 3,7870 und erreicht fast den tatsächlichen Wert von 3,8018. Ein bemerkenswertes Ergebnis, wenn man bedenkt, dass ihnen die heute gebräuchlichen Logarithmen (vermutlich) nicht zur Verfügung standen.

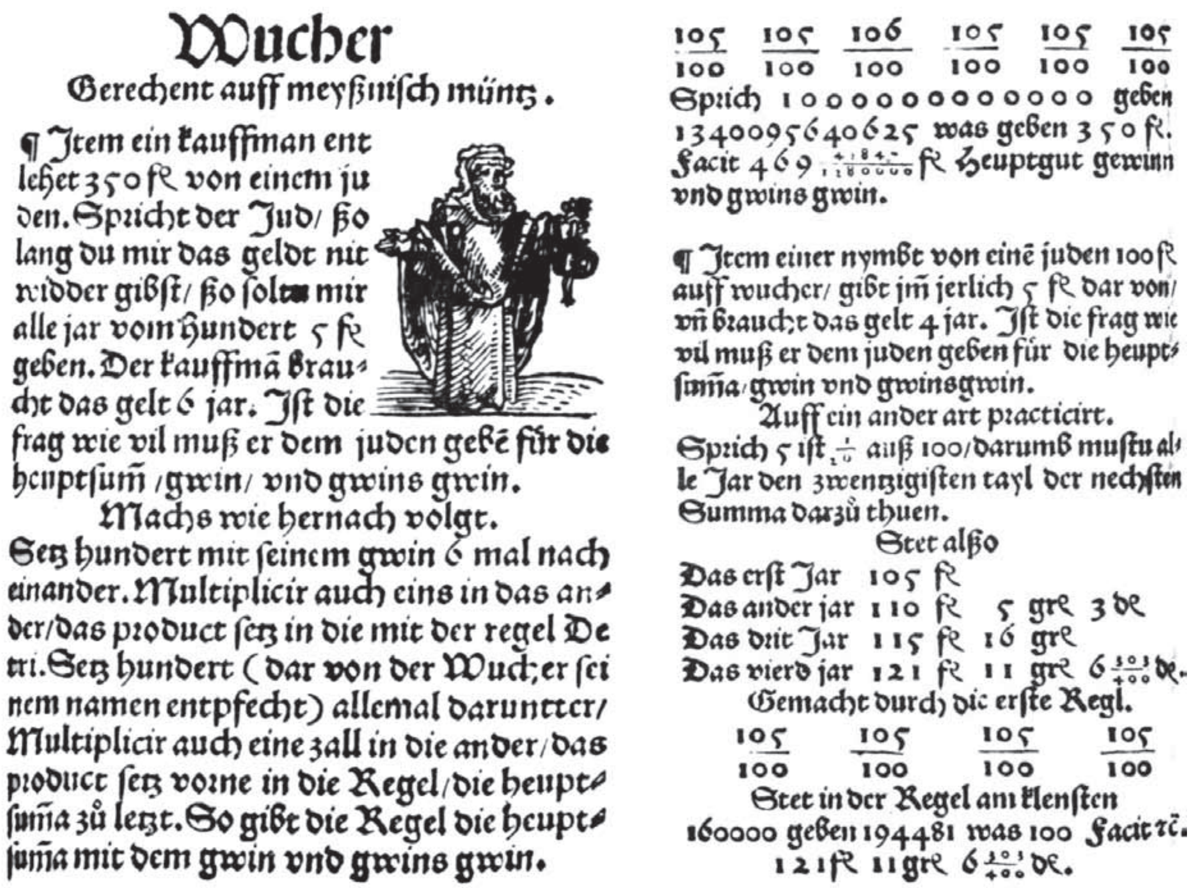
Den Babyloniern war übrigens auch der Lehrsatz des Pythagoras lange vor den Griechen als eine Erfahrungs-Tatsache bekannt. Der Beweis dieses berühmten Lehrsatzes der Planimetrie wurde Pythagoras (ca. 580 - 496) zur Ehre angerechnet.

Luca Pacioli behandelte in seiner 1494 veröffentlichten *Summa* auch Zinseszinsaufgaben. Sie ermöglichten eine Lösung für höchstens zehn Jahre und unterstellten dabei Proportionalität für den Gewinn (Gericke, Helmuth: Mathematik im Abendland. Berlin 1990).

Potenzen

Vorab ein Beispiel zur Mächtigkeit der Potenzen. Verdoppelt man die Seitenlänge eines Quadrats, so ergibt sich die vierfache Fläche; verdreifacht kommt man auf die neunfache Fläche und vervierfacht auf die sechzehnfache Fläche.

Die Potenzen treten in vielen Formeln und Gesetzen der Mathematik, der Naturwissenschaft und der Technik auf; zum Bei-



Wucher
Gerechent auff meyßnisch müntz.
¶ Item ein kauffman entlehet 350 fl von einem juden. Spricht der Jud/ ßo lang du mir das geldt nit widder gibst/ ßo soltu mir alle jar vom hundert 5 fl geben. Der kauffmā braucht das gelt 6 jar. Ist die frag wie vil muß er dem juden gebē für die heuptsum̄ /gwin/ vnd gwins gwin.
Machs wie hernach volgt.
Setz hundert mit seinem gwin 6 mal nach einander. Multiplicir auch eins in das ander/das product setz in die mit der regel De tri. Setz hundert (dar von der Wucher seinem namen entpfecht) allemal darunter/ Multiplicir auch eine zall in die ander/das product setz vorne in die Regel/die heuptsum̄a zů letzt. So gibt die Regel die heuptsum̄a mit dem gwin vnd gwins gwin.

105/100 105/100 106/100 105/100 105/100 105/100
Sprich 1000000000000 geben 1340095640625 was geben 350 fl. Facit 469 [illegible] fl Heuptgut gewinn vnd gwins gwin.

¶ Item einer nymbt von einē juden 100 fl auff wucher/ gibt jm̄ jerlich 5 fl dar von/ vn̄ braucht das gelt 4 jar. Ist die frag wie vil muß er dem juden geben für die heuptsum̄a/gwin vnd gwinsgwin.
Auff ein ander art practicirt.
Sprich 5 ist 1/20 auß 100/darumb mustu alle Jar den zwentzigisten tayl der nechsten Summa darzů thuen.
Stet alßo
Das erst Jar 105 fl
Das ander jar 110 fl 5 gr 3 dl
Das drit Jar 115 fl 16 gr
Das vierd jar 121 fl 11 gr 6 303/400 dl.
Gemacht durch die erste Regl.
105/100 105/100 105/100 105/100
Stet in der Regel am klensten
160000 geben 194481 was 100 Facit rc.
121 fl 11 gr 6 303/400 dl.

Abb. 1 Aus: Apian, Peter: Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung … .
Nachdruck [der Ausgabe Ingolstadt 1527] Buxheim 1995.

spiel stellt in der Geometrie $\frac{4}{3}\pi r^3$ das Volumen einer Kugel dar, $\frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks und die Rentenformel $b \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ in der Zinseszins- und Rentenrechnung.

Für alle reellen Zahlen a $\geq$-1 und ganze Zahlen n $\geq$ 1 ist
$(1 + a)^n \geq 1 + n a$ (Bernoulli'sche Ungleichung).
Das Gleichheitszeichen gilt für n = 1 oder für a = 0.

Im Rahmen seiner Zinseszinsrechnungen bemerkte Leibniz (1646 - 1716): „Für höhere Potenzen werden wir Logarithmen zur Anwendung bringen, …“ (Leibniz, S. 201).

Wucher bedeutet bei Petrus Apianus Zinseszinsrechnung

Peter Apian (1501 - 1552), eigentlich Bienewitz, weist in seiner *Kauffmanß Rechnung* aus dem Jahr 1527 Zinseszinsaufgaben unter Wucher aus. Sein Beispiel lautet: Ein Kaufmann leiht sich 350 fl. für 6 Jahre zu einem Zins von 5 % (s. Abb. 1). Gelöst wird die Aufgabe über einen Dreisatz. In die heutige Potenzschreibweise übertragen:

$$\frac{105^6}{100^6} \cdot 350 = 469{,}03.$$

Der ausführliche Titel seiner 1527 in Ingolstadt gedruckten Schrift lautet: *Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung in dreyen Büchern*.

Am Rande sei erwähnt, dass Peter Apian den bayerischen Erbprinzen Albrecht [Herzog Albrecht V.] auf der 1472 gegründeten Hochschule in Ingolstadt in Kosmo- und Geographie wie in Mathematik unterrichtete. Peter Apian wurde weiten Kreisen durch seine 1524 erschienene *Cosmographia* bekannt. Sein Sohn Philipp wurde 1554 vom bayerischen Herzog Albrecht V. mit der ersten Landvermessung Bayerns beauftragt.

Zinstafeln

Im Jahr der Einführung des Gregorianischen Kalenders 1582 erschien die Schrift *Tafelen van Interest* von Simon Stevin (1548 - 1620). Diese Tafeln dienten einem dringenden praktischen Bedürfnis, so Helmuth Gericke und Kurt Vogel. Stevin nannte als (einzigen) Vorläufer Zinstafeln, die im dritten Buch der Arithmetik von Trenchant (1558) gedruckt wurden und die er erweitert hatte. Sonst gab es nur handschriftliche Zinstafeln, die von den Besitzern geheim gehalten wurden.

Marco Bragadino scheint über keine handschriftlichen Zinstafeln verfügt zu haben. Der bayerische Herzog Wilhelm V. setzte in diesen wegen der Finanzprobleme im Staatshaushalt große Hoffnung. Im Jahr 1575 türmte sich eine Schuldenlast von 300 000 Gulden auf. Bragadino, der auch Papst Gregor XIII. um einen Geldbetrag erleichterte, erwies sich als Hochstapler und wurde 1591 hingerichtet. Der drohende „Generalanstand“ [Staatsbankerott] führte 1597 zur Abdankung von Wilhelm V. Die Erschütterungen der Weltwirtschaft im Zeitalter der überseeischen Handelsausweitung waren die Ursache.

Die Finanzkrise, die nicht auf Schlamperei und Verschwendungssucht beruhte, meisterte sein Sohn Maximilian I., der die Regierungsgeschäfte übernahm.

Diskontierungstabellen von Stevin 1585

Im Jahr 1585 erschienen Tabellen mit Abzinsungen (Diskontierung) von Simon Stevin. Ausgehend von 10 Millionen, berechnete er diskontierte Werte zu unterschiedlichen Zinssätzen für jeweils 30 Jahre. Über dieses Werk (*La Pratique d'Arithmetique.* In: *L' Artihmetique*. Leyden 1585) wurde bereits an anderer Stelle berichtet.

Verfahren zur Berechnung des Periodenzinssatzes

Isaac Newton (1643* - 1727) schuf ein iteratives Lösungsverfahren zur Berechnung des Periodenzinssatzes für einen Kredit, der über Annuitäten getilgt wird. Ausgangsdaten hierfür sind die Anzahl der Zinsperioden, der Darlehensbetrag und die Annuität.

Handliche Regel zur Barwertberechnung

Den Ausführungen von Leibniz (1646 - 1716) im Abschnitt III. 17. „Über Pensionen“ lässt sich eine griffige Formel zur Bestimmung des Barwerts einer nachschüssigen Zeitrente entnehmen (Leibniz, S. 529):

$$\frac{b - b^{a+1}}{1 - b} p.$$

Dabei bedeuten:
a = Anzahl der Zinsperioden,

$$b = \frac{v}{v + 1}.$$

In heutiger Schreibweise wählt man für b den Kehrwert von: 1 + Zinssatz / 100.
p = jährliche Pension,
v = die Zahl, die den Zinssatz zum Ausdruck bringt; z.B. 20 für 5 %.

Dieser Ausdruck bestricht wegen seiner Kürze. Zum gleichen Ergebnis führt folgende Formel von Leibniz:

$$\left(\frac{1 - b^{a+1}}{1 - b} - 1\right) p$$

* Geboren am 4. Jan. 1643 (25. Dez. 1642 alten Stils).

Barwert beruht auf einer geometrischen Reihe

Der Barwert einer Rente gibt den Betrag an, der am Anfang der Laufzeit zu zahlen ist, wenn der Endwert der Rente durch eine einmalige Zahlung abgelöst werden soll. Man erhält den Barwert der nachschüssigen Rente B_n durch Diskontierung des Endwerts der Rente auf den Beginn der Rentenzahlung. Der Endwert einer nachschüssigen Rente ergibt sich als Summe der geometrischen Reihe

$$S_n = r + r\,q + r\,q^2 + r\,q^3 + \ldots + r\,q^{n-1} = r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

p = Zinsfuß je Jahr, $q = 1 + \frac{p}{100}$

r = Betrag der wiederkehrenden Zahlungen

n = Anzahl der Zahlungstermine (Jahre)

Den Barwert B_n erhält man durch Diskontieren des Endwertes $B_n = S_n \cdot \frac{1}{q^n} = r \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Die Größe $\frac{q^n - 1}{q^n\,(q - 1)}$ kann ggf. Barwert-Tabellen entnommen werden.

Leibniz stellte bereits heraus, dass die richtige Berechnung des Gegenwärtigen Werts eines geschuldeten Kapitals eine geometrische Reihe bildet. Für diese genaue Berechnung gebrauchte er übrigens eine kompakte Formel (z. B. für 5 Jahre): $v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 = \frac{v - v^6}{1 - v}$. Dabei ist v der reziproke Wert von $1 + \frac{p}{100}$ [bei jährlicher Berechnung]. Die populäre Berechnung nannte Leibniz dagegen harmonisch.

Bestimmung der Zinsperioden mittels Logarithmen

Die Zinseszinsrechnung erhielt durch die Logarithmen einen gewaltigen Schub. Die Logarithmen ermöglichten die genaue Bestimmung der Anzahl der Zinsperioden. Leonhard Euler (1707 - 1783) zeigte, wie eine Aufgabe gelöst werden kann, bei der nach der Anzahl der Jahre gefragt ist, bis eine Schuld abgetragen wird (bei jährlicher Rückzahlung eines festgelegten Betrages und einem vereinbarten Zinssatz); vgl. Michelsen, Johann Christian: Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen/1. Berlin 1788.

Ein weiteres Beispiel von Euler befasste sich mit folgender Frage: In wie vielen Jahren wächst das menschliche Geschlecht auf das Zehnfache an, wenn die jährliche Vermehrung 1/100 ist?

Der Einfluss der Zinszuteilung

Bei der Zinszahlung gilt als wichtigste Periode ein Kalenderjahr. Wählt man kürzere Zinsperioden (z.B. halbjährlich oder vierteljährlich), dann spricht man von unterjähriger Verzinsung. Man kann fragen, wie sich die Anzahl der Zinsperioden auf das Wachstum eines Sparkontos auswirkt. Die Entwicklung eines Sparkontos von beispielsweise 1 000 Euro bei einem Zinssatz von 10 % und einer zehnjährigen Laufzeit gibt für unterschiedliche Zinsperioden folgendes Bild:

Zinsperiode	Betrag in €
Jahr	2 593,74
Vierteljahr	2 685,06
Monat	2 707,04
Tag (360)	2 717,90
Stunde	2 718,27
Minute	2 718,28
Sekunde	2 718,28

Es zeigt sich, dass eine häufigere Zinszuteilung zwar zu einem höheren Endkapital führt, das Wachstum aber begrenzt ist. Dabei fällt auf, dass mit einer wachsenden Anzahl von Zinsterminen (Stetige Verzinsung) sich ein Betrag herausbildet, der der Zahl e (Basis der natürlichen Logarithmen) sehr nahe kommt. Man kann also sagen, die Zahl e ist das extreme Ergebnis einer Zinseszinsrechnung. Anders ausgedrückt: Die Zahl e ist der Grenzwert der Folge mit dem allgemeinen Glied $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Nachfolgende Übersicht macht deutlich, dass ein weiteres Anwachsen von n das Ergebnis kaum mehr beeinflusst, Änderungen nur noch an weiter rechts stehenden Dezimalstellen vorkommen:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2,59374 24601
100	2,70481 38294
1 000	2,71692 39322
10 000	2,71814 59268
100 000	2,71826 82372
1 000 000	2,71828 04693
10 000 000	2,71828 16925
100 000 000	2,71828 18149
1 000 000 000	2,71828 18271

e = 2,71828 1828 …

Die Zahl e = 2,71828 1828… ist die Basis der natürlichen Logarithmen $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Mit dieser Folge läßt sich e schnell auf verhältnismäßig viele Nachkommastellen genau berechnen. Zum Beispiel erhält man für $n = 12$ die Zahl e auf 9 Stellen genau: 2, 71828 1828. Siehe nachfolgende Übersicht:

1	+ 1/1!			=	2
1	+ 1/1!	+ 1/2!		=	2.500000000000000000
1	+ 1/1!	+ 1/2!	+ 1/3!	=	2.666666666666666667
1	+ 1/1!	...	1/4!	=	2.708333333333333333
1	+ 1/1!	...	1/5!	=	2.716666666666666667
1	+ 1/1!	...	1/6!	=	2.718055555555555556
1	+ 1/1!	...	1/7!	=	2.718253968253968254
1	+ 1/1!	...	1/8!	=	2.718278769841269841
1	+ 1/1!	...	1/9!	=	2.718281525573192240
1	+ 1/1!	...	1/10!	=	2.718281801146384480
1	+ 1/1!	...	1/11!	=	2.718281826198492865
1	+ 1/1!	...	1/12!	=	2.718281828286168564
1	+ 1/1!	...	1/13!	=	2.718281828446759002
1	+ 1/1!	...	1/14!	=	2.718281828458229748
1	+ 1/1!	...	1/15!	=	2.718281828458994464
1	+ 1/1!	...	1/16!	=	2.718281828459042259
1	+ 1/1!	...	1/17!	=	2.718281828459045071

Auf elegante Weise lässt sich die Zahl e mit dem Tröpfel-Algorithmus gemäß Arthur H. J. Sale (1968) berechnen.

$e = 1 + \frac{1}{1}\,(1 + \frac{1}{2}\,(1 + \frac{1}{3}\,(1 + \ldots)))$. Zieht man zur Berechnung von e 12 Glieder heran, so erhält man als Rechenergebnis 2,71828 1829 (Taschenrechner HP 41 [RPN-Modus]) gegenüber genau 2,71828 1828… .

Eine gute rationale Approximation für e ist: 2721/1001 = 2,718281. Berechnung des Verfassers nach dem Algorithmus für die Umwandlung einer Dezimalzahl in eine rationale Zahl von Charles G. Moore: *An Introduction to Continued Fractions*. National Counsil of Teachers of Mathematics, 1964.

Die Zahl e lässt sich übrigens mit sieben Nachkommastellen leicht merken: 2,7 1828 18. In folgender Gliederung lassen sich sogar fünfzehn Stellen der Zahl e leicht einprägen:
2, 7 1828 1828 4590 45.

Erinnert sei an Jost Bürgi (1552 - 1632): Die 10 000. Potenz der von ihm gewählten Zahl 1,0001 ergibt den Wert 2,718146 und stimmt mit der Zahl e = 2,718282 … auf drei Nachkommastellen überein.

Der *Geschichte der Mathematik* von Becker und Hofmann kann entnommen werden, dass Leonhard Euler mit D. Bernoulli (1728) e als Grenzwert von $(1+1/n)^n$ und in Wiedergabe eigener Studien e^x als Grenzwert von $(1+x/n)^n$ im Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz erklärt.

Das Reziprokum von e:

$$e^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+-\cdots.$$

e^{-1} ist angenähert 0,367879.

Exponentialfunktion

Eine Funktion der Form $y = a^x$ heißt Exponentialfunktion ($a > 0$ und $\neq 1$). Wird $a = e$ gesetzt, so erhält man die spezielle Exponentialfunktion $y = e^x$, die oft als Wachstumsfunktion bezeichnet wird. Viele Naturvorgänge führen auf diese Funktion.

Bei Potenzen bedeutet $x^a = b$ etwas anderes als $a^x = b$. Der erste Ausdruck bedeutet heute Potenzieren und beim letzten handelt es sich um eine Exponentialfunktion. Die Umkehrung des ersten Ausdrucks $x^a = b$ ist die lytische Operation des Wurzelziehens, also $x = \sqrt[a]{b}$. Für den zweiten Ausdruck fand sich erst spät eine Lösungsmöglichkeit. In der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts sagte Leonhard Euler: „Der größte Nutzen, welchen die Logarithmen gewähren, zeigt sich bey der Auflösung solcher Gleichungen, wo die unbekannte Größe ein Exponent ist.“ „Hat man z.B. die Gleichung $a^x = b$, und soll man daraus x entwickeln, so kann solches nicht anders als vermittelst der Logarithmen geschehen.“ (§ 111). Die Logarithmen wurden nicht systematisch entdeckt, sie entwickelten sich aus der Praxis heraus.

Exponentialreihen

Die Exponentialreihe

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

konvergiert für jedes x. Für den speziellen Wert $x = 1$ ergibt sich der Wert für die Zahl e (s.o.). e^x ist die einzige Funktion, die mit ihrem Differentialquotienten gleich ist. Dies lässt die Bedeutung der Zahl e erkennen.

Historisches zur „Stetigen Verzinsung“

Wenn die Anzahl der Zinsperioden über alle Maßen wächst ($n\to\infty$), dann liegt eine stetige Verzinsung vor. Leider ist über das historische Umfeld des Ausdrucks $(1+1/n)^n$ kaum etwas bekannt. Jakob Bernoulli (1655 - 1705) soll als Erster die Frage nach dem Endkapital bei stetiger Verzinsung gestellt haben.

Hierzu dürfte wohl auch Simon Stevin (um 1548 - 1620), der schon 1585 Diskont-Tabellen veröffentlichte, einen gewissen Beitrag geleistet haben.

Jakob Bernoulli stellte sich gelegentlich folgendes Problem: „Nach welchem Gesetz wächst ein auf Zinseszinsen liegendes Kapital, wenn die Zinsen in jedem Augenblick zum Kapital geschlagen werden, wenn sie also nicht erst bis zum Jahresende warten müssen, sondern sogleich, schon im Augenblick ihrer Geburt, mit der Arbeit beginnen und ihrerseits Zinsen tragen?“, vgl. Karlson, Paul: Vom Zauber der Zahlen. Berlin 1954, S. 486.

Die Formel für die stetige Verzinsung kommt bei jedem organischen Wachstum zur Anwendung. Für stetige (organische) Verzinsung eines Grundbetrages K_0 in n Jahren gilt der Ausdruck

$$K_n = K_0 \; e^{\frac{p*n}{100}}.$$

Mit einer Modifikation (negativer Exponent) gilt entsprechendes für die stetige Abnahme.

Die Zinseszinsrechnung fand in die unterschiedlichsten Gebiete Eingang. Bei Populationsentwicklungen mag zuerst an die Bevölkerungsentwicklung gedacht werden. Aber auch bei einem Sparkonto handelt es sich um eine Population, deren Verhalten noch dazu recht einfach ist. Bekanntlich lassen sich Wachstums- und Zerfallsprozesse durch eine Exponentialfunktion beschreiben.

Kontinuierliche Verzinsung

Vom ökonomischen Standpunkt aus spielt die Zahl e bei der kontinuierlichen Verzinsung und in der Wachstumstheorie eine zentrale Rolle. Nachfolgend eine Darstellung der kontinuierlichen Verzinsung (nach *Meyers Großer Rechenduden*).

Werden zu einem Anfangskapital K_0 beim Zinssatz p % je Jahr jeweils nach 1/m Jahr die Zinsen hinzugetan und dann mitverzinst, so wächst das Kapital in n Jahren an auf den Betrag

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}.$$

Man kann sich vorstellen, dass die Zinsen in jedem Augenblick, also kontinuierlich, dem Kapital zugeschlagen werden. Will man dafür eine Formel entwickeln, so muss man die Zahl der Zinstermine unendlich groß werden lassen, das heißt

$$K = \lim_{m \to \infty} K_n = \lim_{m \to \infty} K_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}$$

ist zu berechnen.

Setzt man $\frac{p}{100 \cdot m} = \frac{1}{x}$, so bekommt man

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x \cdot p \cdot n}{100}} = K_0 \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{p \cdot n}{100}}.$$

Der Grenzwert $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ist bekannt. Es ist $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$ e = 2,718… die Basis der natürlichen Logarithmen. Damit ergibt sich die Formel für die kontinuierliche Verzinsung

$$K = \lim_{x \to \infty} K_0 \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{p \cdot n}{100}} = K_0 \, e^{\frac{p \cdot n}{100}}.$$

Von 1 auf 2,71828

Nach dem Exkurs über die Kontinuierliche Verzinsung soll folgende Frage beantwortet werden: Welcher Zinssatz muss zugrundeliegen, damit bei einer gegebenen Anzahl von Jahren aus 1 die Zahl e=2,71828 wird? Nachfolgende Übersicht weist für ausgewählte Jahre die Ergebnisse aus:

Anzahl der Jahre	Zinssatz (%)
5	*22,14*
10	*10,52*
20	*5,13*
30	*3,39*
40	*2,53*
50	*2,02*

Verdoppelung einer Größe

Von Interesse ist die Zeit, nach der sich eine Anfangsgröße verdoppelt hat. Nachfolgend eine kleine Übersicht, der die Anzahl der Jahre und der zugehörige Zinssatz entnommen werden kann.

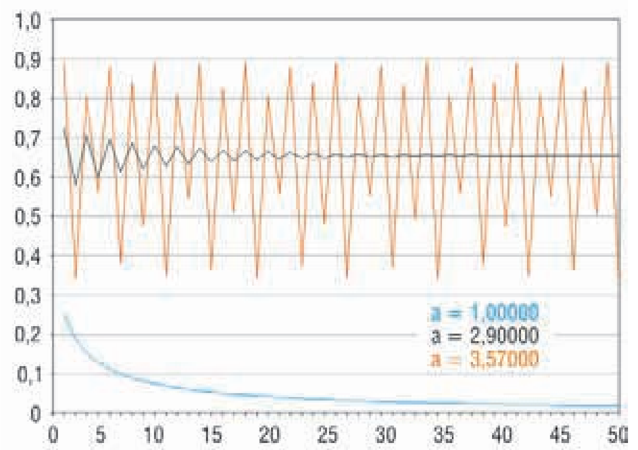
Anzahl der Jahre	Zinssatz (%)
5	*14,87*
10	*7,18*
15	*4,73*
20	*3,53*
25	*2,81*
30	*2,34*

Bei einem Zinssatz in Höhe von 7 % tritt die Verdoppelung nach 10,24 Jahren ein.

Die logistische Kurve

Eine Population kann sich nach unterschiedlichen Gesetzen entwickeln. Sie kann einer arithmetischen oder geometrischen Progression mit der Zeit unterliegen. Dass Wachstums-prozesse die Bäume nicht in den Himmel wachsen lassen, lässt sich mit einer logistischen (autokatalytischen) Kurve veranschaulichen. Sie verläuft S-förmig und sie beinhaltet die besondere Zahl e. Raymond Pearl und Lowell J. Reed haben diesen Kurventyp wieder entdeckt. Von Raymund Pearl wurde eine Variante 1924 zur Prognose der Bevölkerungsentwicklung eingesetzt. Die logistische Kurve oder logistische Funktion geht auf P. F. Verhulst (1804 - 1849) zurück. In diesem Kontext sei an Thomas Robert Malthus (1766 - 1834) erinnert, der sich mit Wachstumsmodellen beschäftigte. Berühmtheit erlangte seine unzutreffende Annahme, dass sich die Bevölkerung geometrisch und die Nahrungsmittelproduktion arithmetisch entwickeln.

Abb. 2 Logistische Gleichung für drei Kurven



Wahl des Maßstabs bei einer graphischen Darstellung

Bei der Darstellung von Größen steht man oft vor der Frage, welcher Maßstab zugrunde gelegt werden soll. Ein Diagramm im arithmetischen Maßstab zeigt Veränderungen absolut, ein Diagramm im logarithmischen Maßstab zeigt Veränderungen prozentual. So ist ein Preissprung um 1 € von 10 auf 11 € oder von 100 auf 101 € in einer arithmetischen Skala gleich groß, während in einer logarithmischen Skala zum Ausdruck kommt, dass der erste im Verhältnis bedeutender ist als der zweite.

Bei der Wahl eines optimalen Maßstabs sind Logarithmen unentbehrlich.

Zur graphischen Darstellung von Summenkurven sei bemerkt: Mit der Wahl eines logarithmischen Maßstabs auf der x-Achse (Abszisse) lassen sich Aussagen über Größenklassen besser ablesen.

Zinsen und eine logistische Gleichung

Ein bemerkenswertes Verhalten kann man beobachten, wenn man auf ein Sparkonto (oder eine andere Population) eine logistische Gleichung anwendet. Dabei handelt es sich um eine Variante einer einfachen linearen Gleichung. Bei ihr fließt das vorangegangene Ergebnis in das nachfolgende mit ein. Die Eigenschaften der logistischen Gleichung begann der Biologe Robert May 1976 zu untersuchen. Die logistische Gleichung spielte bei der Entwicklung der Chaostheorie eine entscheidende Rolle. Durch den Physiker Mitchell Feigenbaum rückte die Chaostheorie in ein anderes Licht. Dieser beobachtete nämlich, dass viele scheinbar nicht zusammenhängende nichtlineare Systeme sich auf bemerkenswert ähnliche Weise verhalten. Seither spricht man von den magischen „Feigenbaum-Zahlen“. Die logistische Gleichung weist einige interessante Eigenschaften auf. Die Differenzengleichung

$x_{t+1} = a\,x_t\,(1 - x_t),\ t = 0, 1, \ldots$ mit einem Parameter $a \in (0,4]$

heißt logistische Gleichung, wobei a ein konstanter Veränderungsfaktor ist und x_t ein Anteil (eine Zahl zwischen 0 und 1). In Abbildung 2 wurden drei Kurvenverläufe dargestellt. Besonders interessant ist die Entwicklung der roten Kurve; für x_0 wurde jeweils 0,5 eingesetzt.

Geometrisches Mittel

Im Zusammenhang mit dem geometrischen Wachstum und der Zinsrechnung soll das sogenannte Geometrische Mittel kurz gestreift werden. Seine Formel lautet:

$$x_G = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \cdots * x_n}\ .$$

So benutzt man bei der Suche des geometrischen Mittels Logarithmen, um sich das Wurzelziehen (n>2) zu ersparen. Die Logarithmen gehören zu den elementaren Rechenverfahren eines Statistikers. Nach Cauchys (1789 - 1857) Mittelwertsatz gilt: Das geometrische Mittel mehrerer positiver Zahlen ist kleiner als das arithmetische Mittel der Zahlen (beide Mittel sind nur dann gleich groß, wenn die Zahlen jeweils gleich sind).

Cauchys Formel:

$$\sqrt[n]{a_1 * a_2 * \ldots * a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Eine allgemeine Anmerkung zu Wachstumsraten

Bei der Berechnung von Wachstumsraten ist zu beachten, dass eine Steigerung um einen bestimmten Prozentsatz und eine darauf folgende Verringerung des Wertes um den gleichen Prozentsatz nicht den Ausgangspunkt, sondern einen geringeren Wert ergibt. So kann man beispielsweise fragen: Um wie viel muss ein Wert, der eine Einbuße um 60 % hinnehmen musste, steigen, damit wieder der ursprüngliche Wert erreicht wird? Die Antwort: 150 %.

Zum Ansparen für das Alter

Der Kapitalbedarf im Alter sollte nicht unterschätzt werden. Der nachstehenden Übersicht kann entnommen werden, wie über die Dauer der Ansparzeit der monatliche Aufwand sinkt, wenn der Zinseszinseffekt voll zum Tragen kommt.

Monatliche Sparrate um nach einer bestimmten Zeit bei einem angenommenen Zins den Betrag von 100 000 Euro zu erzielen (vorschüssig)[2]

Spardauer in Jahren	2 % Zins		4 % Zins	
	monatliche Sparrate	Gesamt-aufwand	monatliche Sparrate	Gesamt-aufwand
20	339	81 277	272	65 218
30	203	72 941	144	51 697
40	136	65 248	84	40 476

Entwertung einer Rente durch Inflation

Der Ausgewogenheit halber sind noch ein paar Sätze zum Inflationsrisiko fällig. Die Inflation ist der Feind der Rentner. Bei einer Inflationsrate von 2 % wird die Kaufkraft nach rund 35 Jahren halbiert. Beläuft sich die Inflationsrate zum Beispiel auf 5 %, dann ist die Halbierung der Kaufkraft bereits nach rund 14 Jahren eingetreten.

Zum Wesen von Zinspapieren gehört die Erfüllung des darin verbrieften Zahlungsversprechens. Der Wertbeständigkeit des Geldes gebührt der absolute Vorrang, soll das Wertpapier nicht zur Makulatur werden.

Jemand brachte einmal die Geldentwertung – feuilletonistisch überspitzt – mit der germanischen Mythologie in Verbindung. Der Drache Nidhögg nagt an den Wurzeln der Weltesche Yggdrasill. Im heutigen Sinn steht Yggdrasill für die Notenbank, deren blätterreicher Wipfel aus Banknoten besteht. Solange sie grünen, geht es den Sparern gut. Aber Nidhögg nagt an den Wurzeln und so kommt es, dass die Blätter verkümmern. Wer dieser gefährliche Nager ist, weiß man nicht so recht.

Im 18. Jahrhundert war der Begriff „inflationsindexierte Anleihen“ zwar noch nicht bekannt und dennoch wusste man sich vor Kaufkraftverlusten zu schützen, wie ein Beitrag von Hanno Beck in der F.A.Z. vom 8. Juni 2004 zum Ausdruck brachte. Dabei ging es um eine 1780 in Massachusetts getroffene Vereinbarung: „Gläubiger und Schuldner der Anleihe vereinbarten, dass die Höhe des Rückzahlungsbetrags sich nach dem am Tag der Rückzahlung zu ermittelnden Wert von fünf Bündeln Heu, 68 Pfund Rindfleisch, 10 Pfund Schafswolle und 16 Pfund Schuhleder richten soll.“

Heutzutage misst der Verbraucherpreisindex die durchschnittliche Preisentwicklung von Waren und Dienstleistungen, die von privaten Haushalten für Konsumzwecke gekauft werden. In Deutschland wird der Verbraucherpreisindex, wie in vielen anderen Ländern, als Laspeyres-Preisindex errechnet. Dieser geht auf den deutschen Ökonomen Étienne Laspeyres (1834 - 1913) zurück. Erwähnt seien seine Schriften *Hamburger Waarenpreis 1851 - 1863 und die californisch-australischen Goldentdeckungen seit 1848* und *Die Berechnung einer mittleren Waarenpreissteigerung* in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik: 3. Band. Jena 1864 bzw. 16. Band. Jena 1871.

Milton Friedman berief sich in seinem 1992 erschienen Buch *Geld regiert die Welt* auf David Hume (1711 - 1776), der in seiner Zeit schon erkannte: „Eine Ausweitung der Geldmenge bewirkt lediglich den Effekt, den Preis für Arbeit und Rohstoffe in die Höhe zu treiben.“

Sparsamkeit soll nicht zu einer Tugend der Dummen werden, wie es Robert Nef formulierte. Er nahm Bezug auf Lafontaines Fabel [Jean de La Fontaine (1621 - 1695)] von der sparsamen Ameise und der sorglosen Grille und meinte: „Man gewinnt sogar zunehmend den Eindruck, dass sich der Staat zum Anwalt der Grillen macht und sie letztlich auf Kosten der Ameisen versorgen will.“, vgl. *Tugend als Bollwerk der Freiheit* in „Finanz und Wirtschaft“ vom 17. Dezember 2005.

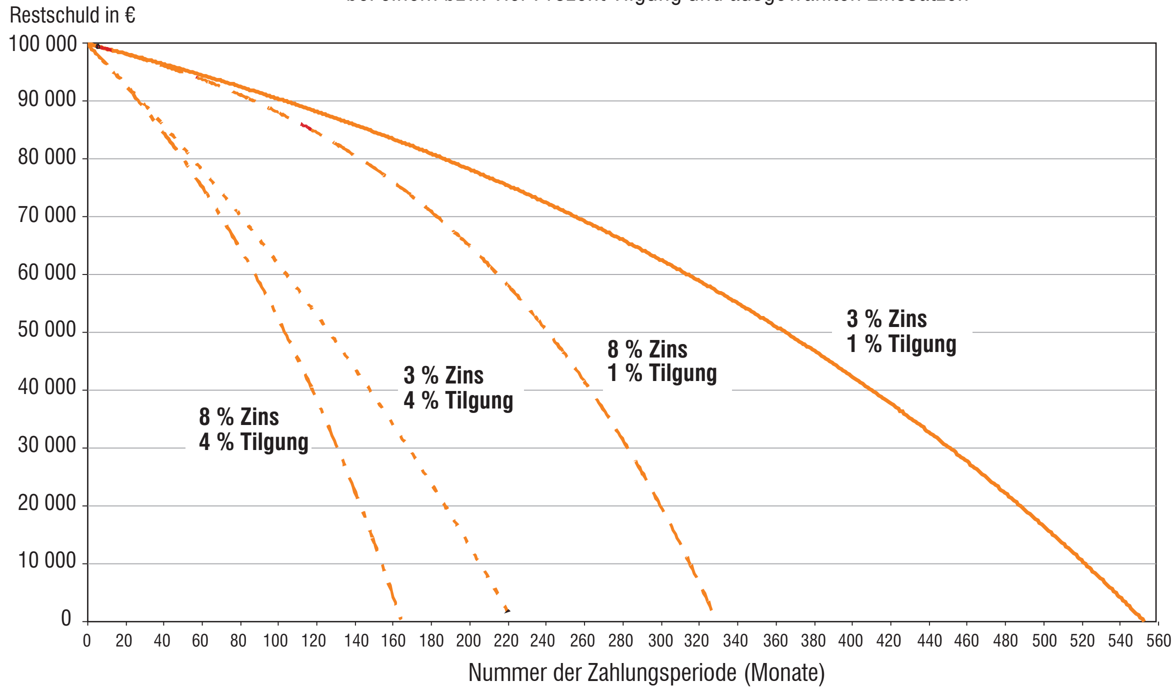
Tilgungssatz bestimmt die Tilgungsdauer

Die Hypothekenzinsen haben derzeit einen historischen Tiefstand erreicht. Das niedrige Zinsniveau hat aber seine Tücken. Niedrige Zinsen sind ein verlockendes Argument für den Erwerb einer Immobilie. Sie sollten aber bei einer Kreditaufnahme nicht den Ausschlag geben. Bei der Rückzahlung eines Darlehens ist die Dauer der Tilgung von Bedeutung, auch bei einem niedrigen Zinssatz, wie folgende Beispiele und Abb. 3 zeigen (nachschüssige Berechnung).

2 Zahlen jeweils gerundet.

Abb. 3

Tilgungsdauer eines Darlehens in Höhe von 100 000 Euro
bei einem bzw. vier Prozent Tilgung und ausgewählten Zinssätzen



Höhe des Darlehens Euro	Zinssatz %	Tilgungssatz %	Monatlicher Ratenbetrag Euro	Dauer der Tilgung Monate	Gesamtaufwand Euro
100 000	3	1	333,33	555,21	185 068
100 000	3	3	500,00	277,61	138 805
100 000	3	4	583,33	224,13	130 742
100 000	5	1	500,00	430,92	215 460
100 000	5	4	750,00	195,03	146 273
100 000	8	1	750,00	330,68	248 010
100 000	8	4	1 000,00	165,34	165 340

Annuitäten-Darlehen mit einem niedrigen Zins laufen wesentlich länger bis zur Tilgung als solche mit einem höheren Zins. Mit jeder Ratenzahlung nimmt die Tilgung etwas zu, während der Zinsaufwand etwas abnimmt. Je niedriger der Darlehenszins ist, umso kleiner fällt die Zinsersparnis aus.

Zur Tilgung der öffentlichen Schulden

In ihrer Ausgabe vom 7. Januar 2005 versah die F.A.Z. einen Beitrag mit dem Titel *Jede Sekunde 2660 Euro mehr*. Diese Meldung bezog sich auf die Staatsverschuldung. Zitiert wurde der Steuerzahlerbund: „Gesetzt den Fall, von sofort an würden keinerlei neue Schulden mehr aufgenommen und die öffentliche Hand würde gesetzlich verpflichtet, jeden Monat eine Milliarde Euro Schulden zu tilgen, so würde dieser Prozeß nach Berechnungen des Steuerzahlerbundes mehr als 117 Jahre andauern müssen, um den Schuldenberg vollständig abzutragen." Das ist sehr einfach gerechnet.

Man könnte zum Beispiel folgende Frage formulieren: Wie lange dauert der Schuldenabbau von damals 1 415 Milliarden Euro bei einem Zinssatz von 4 % und einer Tilgung von 1 bzw. 3 %? Bei einer Tilgung von einem Prozent müssten monatlich 5,9 Milliarden Euro gezahlt werden und das rund 484 Monate (rund 40 Jahre) lang; bei drei Prozent Tilgung ergeben sich folgende Zahlen: monatliche Zahlung von 8,25 Milliarden Euro für rund 255 Monate (etwa 21 Jahre).

Angesichts der demographischen Entwicklung stehen in der Zukunft gewaltige Verbindlichkeiten ins Haus. Rechnet man zum damaligen Schuldenstand (1,4 Billionen Euro) die Anwartschaften in den Sozialversicherungen (5,7 Billionen) hinzu, so beläuft sich dieses Ergebnis auf 7,1 Billionen Euro, vgl. die Rede von Bundespräsident Köhler beim Arbeitgeberforum „Wirtschaft und Gesellschaft" in Berlin am 15. März 2005. Erinnert sei an dieser Stelle an Cicero (106 - 43 v. Chr.), der schon vor 2000 Jahren meinte: „Die Menschen sehen nicht ein, welch große Einnahmequelle die Sparsamkeit ist.", vgl. *Paradoxa Stoicorum* 49.

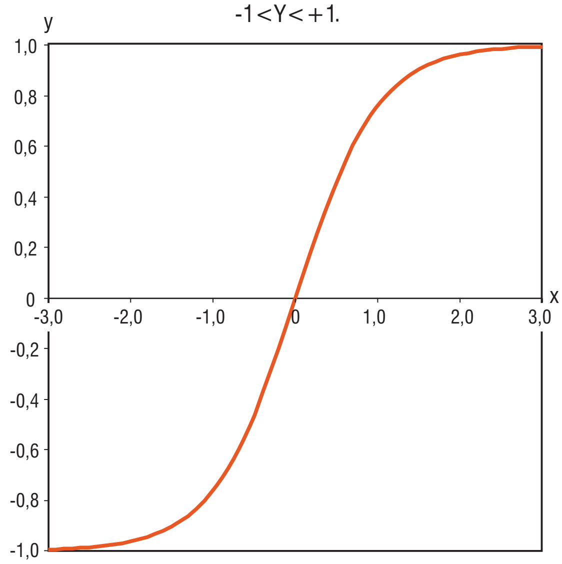
Eine hyperbolische Kurve für den Steuertarif

Die Nützlichkeit der Zahl e zeigt sich beispielsweise auch bei der Lösung des berühmten Problems der hängenden Kette oder beim Problem der „Vertauschten Briefe“. Sie könnte auch bei einem immer wieder diskutierten Thema, nämlich dem Steuertarif, hilfreich sein.

Es besteuert der Steuerstaat, auf dass er besser steuern kann!? Schon Albert Einstein (1879 - 1955) soll sich folgendermaßen geäußert haben: „Um eine Steuererklärung abgeben zu können, muss man ein Philosoph sein. Für einen Mathematiker ist es zu schwierig.“ Hans-Adam II, Fürst von und zu Liechtenstein, meint: „Wo es Steueroasen gibt, muss es auch Steuerwüsten geben.“

Die „Steuererklärung auf dem Bierdeckel“ (Friedrich Merz) ist nicht in Sicht. Wie auch immer: Geeignet erscheint der tangens hyperbolicus (Hyperbeltangens), siehe Abbildung 4. Die Hyperbelfunktionen entstehen durch rationale Verbindungen der natürlichen Exponentialfunktionen e^x und e^{-x}. Einen Vorschlag zur Steuervereinfachung gab Harald Fritzsch mit seinem Beitrag *Statt Steuertabellen eine mathematische Formel* in der *SZ* vom 25. Februar 1987 ab. Danach sollte die Steuerrate eine möglichst stetige Funktion des Einkommens sein, die von einem gewissen Anfangswert langsam ansteigt, wobei der Spitzensteuersatz letztlich nur angesteuert, aber nie ganz erreicht wird (asymptotischer Wert). Eine solche

Abb. 4 **Der Hyperbeltangens**
(Tangens hyperbolicus): y=tanh x.
Der Bereich der Werte ist beschränkt, es gilt
-1<Y<+1.



Funktion gibt es unter den elementaren mathematischen Funktionen, nämlich den sogenannten tangens hyperbolicus (tanh). Dessen Verwendung hätte für den Steuertarif nicht nur den psychologisch wichtigen Effekt der Glättung der Steuerkurve zur Folge, und damit den Wegfall des Mythos, den der Spitzensteuersatz heute besitzt, so die Ausführungen von Harald Fritzsch.

Literaturnachweis

Cicero, Marcus Tullius: De legibus = Über die Gesetze. Paradoxa stoicorum = Stoische Paradoxien. Lateinisch und deutsch / M. Tullius Cicero. Hrsg., übers. und erl. von Rainer Nickel. München; Zürich 1994.

Euler, Leonhard: Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen / aus dem Latein. übers. und mit Anm. und Zusätzen begleitet von Johann Andreas Christian Michelsen. 1. Buch, Berlin 1788.

Jursa, Michael: Die Babylonier: Geschichte, Gesellschaft, Kultur. München 2004.

Leibniz, Gottfried Wilhelm: Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik / Gottfried Wilhelm Leibniz. Hrsg. von Eberhard Knobloch … . Berlin 2000.

Pacioli, Luca: Abhandlung über die Buchhaltung 1494. Nach dem italienischen Original von 1494 ins Deutsche übersetzt und mit einer Einleitung über die italienische Buchhaltung im 14. und 15. Jahrhundert und Paciolis Leben und Werk versehen von Balduin Penndorf. Stuttgart 1933.

Stevin, Simon: De Thiende. Das erste Lehrbuch d. Dezimalbruchrechnung nach der holländischen und der französischen Ausgabe von 1585. Übers. und erl. von Helmuth Gericke und Kurt Vogel. Frankfurt a. M. 1965, S 32.

Ein Blick in die Historie der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Nach Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) sind die wichtigsten Fragen im Leben zum größten Teil nur Probleme der Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten. Ereignisse, die im Einzelfall völlig unbestimmt und unsicher sind, werden nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitslehre in der Masse überschaubar und können abgeschätzt werden. Das trifft auch für die Abschätzung der mittleren Lebenserwartung einer Person zu. Von dieser Größe wird zum Beispiel maßgeblich die Höhe einer Leibrente geprägt. Da das Sterbealter eines Menschen unbekannt ist, muss man sich auf Wahrscheinlichkeiten stützen, stellte Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) schon vor mehr als 300 Jahren fest. Es ist bemerkenswert, dass die Lebensversicherung, die sich aus dem mittelalterlichen Leibrentengeschäft entwickelte, zu den ersten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Wirtschaftsleben zählt. Die Versicherer ließen das Alter und die Lebenserwartung in ihre Kalkulation einfließen.

Exkurs in die Geschichte

Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitstheorie finden sich im 17. Jahrhundert, als aristokratische Glücksspieler bei Mathematikern um Rat nach Gewinnstrategien suchten. In jenem Jahrhundert vollzog sich in der Mathematik ein gewaltiger Schub im Umfeld umwälzender politischer Ereignisse. Mitglieder der Familie Bernoulli trugen nennenswert mit dazu bei, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie ihrer Geburtsstätte in den Spielhöllen entrann und zu einer angesehenen Lehre mit zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten heranwuchs. „Nirgendwo hat der Mensch mehr Scharfsinn an den Tag gelegt als in seinen Spielen“ heißt es in einem Brief von Leibniz an Pascal.

Jakob Bernoulli (1655 - 1705) wandte Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht nur auf Glücksspiele, sondern auch auf Todesfälle an. Bei der Sterblichkeitskurve begegnet man heutzutage dem Spiel des Zufalls durch Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten. Das Material für eine Sterbetafel ist mit zufälligen Abweichungen behaftet. Aufgrund der geringen Besetzungszahlen bestimmter Altersjahre sind die rohen Werte weniger zuverlässig als die von anderen Altersjahren.

Nach der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die Dauer eines menschlichen Lebens ebenso wie das Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel ein Zufallsereignis. Man spricht von der Chance, im Lotto zu gewinnen, oder dem Risiko, ein Unglück zu erleiden. Die Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl, die nicht kleiner als Null und nicht größer als Eins sein kann: $0 \leq W \leq 1$. Wahrscheinlichkeit wird auch als Mathematik des Zufalls bezeichnet.

Wer investiert, muss Annahmen über die Zukunft treffen und geht dabei Risiken ein. Die Vergangenheit ist immer Gewissheit, die Zukunft Wahrscheinlichkeit. Der Zufall als Mitgestalter der Zukunft? Was die Zukunft bringt, hängt auch von den richtigen Weichenstellungen in Vergangenheit und Gegenwart ab. Das alte Diktum „In dieser Welt gibt es nichts Sichereres als den Tod und die Steuern“ stammt bekanntlich von Benjamin Franklin (1706 - 1790).

Vormals war manche Entscheidung von Aberglauben und Empirie bestimmt. Das Handeln muss dem Denken folgen, war ein Grundsatz von Cicero (106 - 43 v. Chr.). In seinem Werk *De off.* (Vom pflichtgemäßen Handeln) heißt es (I,2,7): „Denn jede Unterweisung, die auf wissenschaftlicher Grundlage über irgendeinen Gegenstand entworfen wird, muss ausgehen von der Begriffsbestimmung, damit verstanden werde, was das sei, worüber die Erörterung geht.“

Auf den Philosophen Baruch (Benedictus) de Spinoza (1632 - 1677) geht der Satz zurück: „Es ist richtig, dass wir im Leben vieles auf Grund bloßer Vermutungen tun, aber es ist falsch, dass unsere Ideen bloß auf Vermutungen beruhen.“ Eine Lebensregel des englischen Mathematikers und Philosophen Bertrand Russel (1872 - 1970) lautete: „Auch wenn alle einer Meinung sind, können doch alle unrecht haben.“

Wenngleich das Vermuten oder Mutmaßen eine uralte menschliche Tätigkeit darstellt, so dauerte es doch, bis die ersten fundierten Abhandlungen zu diesem Thema entstanden, so das postume Werk von Jakob Bernoulli *Ars Conjectandi* (Kunst der Mutmaßung) von 1713.

Ausgewählte historische Schriften zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:
1657 Christiaan Huygens *De ratiociniis in ludo aleae*
1713 Jakob Bernoulli *Ars Conjectandi, opus posthumum*
1718 Abraham de Moivre *The Doctrine of Chances*
1812 Pierre Simon de Laplace
- *Théorie analytique des probabilités*
- *Essai philosophique sur les probabilités (*1814)

1837 Siméon Denis Poisson *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle …*

Eine wichtige Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sog. *Methode der kleinsten Quadrate*, ist Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) zu verdanken. Die Normalverteilung, die auf De Moivre (1667 - 1754) zurückgeht, ist eine wichtige theoretische Häufigkeitsverteilung der statistischen Methodenlehre. De Moivre begann seine Überlegungen auf dem Gebiet der Glücksspiele. Unabhängig von ihm wurde dieses Gesetz von Carl Friedrich Gauß bei Untersuchungen der Verteilung von Messfehlern hergeleitet. Ob sie zur Berechenbarkeit der Finanzmärkte taugt, wurde im Passus *Bemerkenswertes zu Geldgeschäften und die Anfänge des Versicherungswesens* (s. „Bayern in Zahlen“ 11/2007 und s. S. 47) erörtert.

Als Begründer der Hypothese des sogenannten „Random Walk“ gilt heute Louis Bachelier (1870 - 1946). Er betrachtete den Verlauf eines Börsenkurses als Zufallsprozess. Seine 1900 vorgelegte Dissertation *Théorie de la Spéculation* (Theorie der Spekulation), die damals in ihrem Wert verkannt wurde, ist von Paul A. Samuelson 1956 wieder entdeckt worden. Albert Einstein (1879 - 1955) war 1905 nicht bekannt, dass bereits fünf Jahre früher Bachelier einen gehörigen Teil der mathematischen Ergebnisse zur Brown’schen Bewegung beschrieb.
Bei einem Streifzug durch die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Erwähnung des arithmetischen Dreiecks unausweichlich. Dieses wurde erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts zum Ausgangspunkt für drei Zweige der Mathematik, darunter die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Aufmerksamkeit verdienen in diesem Kontext die sagenumwobenen Fibonacci-Zahlen. Die Nützlichkeit der in Wahrscheinlichkeitsaufgaben häufig auftretenden Zahl e wird an einem klassischen Beispiel (Problem der vertauschten Briefe) vorgeführt.

Einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie leisteten im 19. Jahrhundert P.L. Tschebyschow (1821 - 1894), A.A. Markow (1856 - 1922), A.M. Ljapunow (1857 - 1918), um nur einige Namen zu nennen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde im Lauf ihrer Entwicklung zu dem Zweig der Mathematik, der sich mit der Aufdeckung der Gesetzmäßigkeiten von zufälligen Ereignissen befasst.

Die heute allgemein angenommene axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit stammt von Andrej N. Kolmogorov (1903 - 1987). Er begründete sie in seinem Buch *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Erstveröffentlichung Berlin 1933 in deutsch, 1936 in russisch).

Schon Thomas Bayes (1702 - 1761) befasste sich mit Fragen der Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit von Hypothesen. Antoine de Condorcet (1743 - 1794) erkannte die Möglichkeit nichteindeutiger Entscheidungen bei Verwendung des Prinzips relativer Mehrheiten.

Die statistische Testtheorie wurde von E.S. Pearson und J. Neyman um 1930 entwickelt. Prüfverfahren sind hilfreich, wenn sich die Frage stellt, ob die aufgetretenen Abweichungen zufälliger oder wesentlicher Natur sind. Sie sind meist auf Grund der Annahme einer normal verteilten Grundgesamtheit entwickelt worden.

Die moderne Stichproben-Theorie geht zum großen Teil auf die Untersuchungen von Sir Ronald Fisher (1890 - 1962) zurück. Er führte die Zufallsauswahl ein. Fisher beschrieb komplexere Zufallsanordnungen anhand von Blöcken und lateinischen Quadraten und begründete die Methode der Varianzanalyse, bei der die Daten aus vergleichenden Zufallsexperimenten analysiert werden. Es ist wissenswert, dass die Theorie der Stichproben in engem Zusammenhang mit der Praxis biologischer und besonders landwirtschaftlicher Experimente entwickelt wurde. Die Entwicklung der Varianzanalyse von Fisher wurde erst durch die Ableitung der F-Verteilung durch George W. Snedecor möglich. Diese Verteilung wurde zu Ehren Fisher's F-Verteilung genannt.

Viele Verteilungen spielen in der Stichproben-Theorie (Zufallsstichproben) eine Rolle, wie zum Beispiel die Binomialverteilung, Poissonverteilung, Hypergeometrische Verteilung, Multinomialverteilung und die Normalverteilung. Stichproben können bei zwei Fragestellungen eine Hilfestellung geben: Sei es die Schätzung gewisser Parameter der Merkmalsverteilung einer Grundgesamtheit. Oder die Überprüfung von Hypothesen bezüglich der Verteilung der Gesamtheit bzw. bestimmter Parameter einer Verteilung.

Weissagung und Lebensschicksal

Logik und Analyse waren in der Antike nicht die einzigen Entscheidungshilfen. Mancher stützte sich auf das berühmte Orakel von Delphi, so auch der letzte König von Lydien, Krösus (reg. um 560 - 546 v. Chr.). Die Weissagung des delphischen Orakels, er werde, wenn er den Halys überschreite, ein großes Reich zerstören, erfüllte sich an ihm selbst: 546 v. Chr. wurde er von dem persischen König Kyros II. besiegt.

Kairos war in der Anschauung der alten Griechen der Augenblick, der dem Menschen schicksalhaft entgegentritt, aber von ihm auch genutzt werden muss.

Als die ersten Propheten galten priesterliche Astronomen, die die nächste Mond- oder Sonnenfinsternis voraussagen konnten.

Den Schleier vor der Zukunft zu lüften, ist ein alter Menschheitstraum. So ließ die Ungewissheit der Zukunft von jeher einen Bedarf an Einschätzungen künftiger Ereignisabläufe aufkommen. Bei Etruskern und Römern war Haruspex der Wahrsager.

Die weissagende Sibylle aus der Antike wird durch den lateinischen Satz charakterisiert: „Cum taetra prodigia nuntiata erant, decemviri libros Sibyllinos adire iubebantur.“ (Wenn „=sooft“ schlimme Vorzeichen gemeldet wurden, wurden die Dezemvirn [lat. „Zehnmänner“] beauftragt, die Sibyllinischen Bücher einzusehen.)

Zur Entscheidungsfindung diente und dient das Los, ein vom menschlichen Willen unabhängiges Mittel der Schicksalsbefragung. Einem klassischen Beispiel begegnet man im N.T. (Joh. 19,24): „... und über mein Gewand warfen sie das Los (Ps 22,19).“

„... sich über nichts zu wundern, wenn es eingetreten ist, und von nichts vor seinem Eintreten zu glauben, es könne nicht geschehen. >Deshalb müssen alle besonders dann, wenn das Glück am größten ist, bei sich bedenken, wie sie schlimme Trübsal ertragen können. Auf Gefahren und Unglück soll man bei der Rückkehr von einer weiten Reise gefasst sein, …<“ schreibt Cicero in *Tusculanae disputationes* (III 14,30).

In den *Annalen* (VI,22) von Tacitus findet sich der Satz: „Wenn ich von diesen und ähnlichen Begebenheiten höre, weiß ich nicht, wie ich mich entscheiden soll, ob in dem Ablauf des Menschenlebens das Schicksal oder eine unabänderliche Notwendigkeit oder reiner Zufall waltet.“

Erwähnenswert ist eine Anweisung Napoleons an seinen Kabinettssekretär: „Berichten Sie mir täglich, auch wenn nichts vorgefallen ist; es kann von Wichtigkeit sein zu wissen, dass sich nichts zugetragen hat, dass Erwartungen ausgeblieben sind.“

Aleatorische Verträge

Als aleatorische Verträge (vom lat. alea „Würfel“) gelten Verträge, bei denen der Zufall entscheiden soll, für wen das Geschäft einen Vorteil oder Nachteil bringen wird; zum Beispiel Wette, Spiel, Termingeschäft.

Zum Begriff Spekulation

Der Begriff Spekulation wird oft mit den Finanzmärkten in Verbindung gebracht. Was bedeutet Spekulation überhaupt?

In einer staatlichen Untersuchung des Börsenwesens in Deutschland im 19. Jahrhundert war zu lesen: „Spekulation ist diejenige geistige Tätigkeit, welche aus den Erfahrungen der Vergangenheit und der Beobachtung der Gegenwart einen Schluss auf die Zukunft zieht.“

Der Investmentbankier Gerald M. Loeb definierte den Begriff Spekulation wie folgt: „Zwischen Glücksspiel und Spekulation besteht ein großer Unterschied. Glücksspiel beinhaltet ein Risiko, das man nicht beeinflussen kann. Spekulation, wenn sie richtig betrieben wird, bedeutet, dass man seine Intelligenz und sein Urteilsvermögen für die Entdeckung einer Chance und ihre Untersuchung einsetzt.“

Der Philosoph Peter Koslowski drückt sich so aus: „Spekulation sei nicht nur ein Spiel, sondern der nützliche Versuch, sich auf künftige Unsicherheiten einzustellen.“, siehe F.A.Z. vom 1. Juni 2002, Seite 15.

Von Ludwig Bamberger (1823 - 1899), finanzpolitischer Berater Bismarcks, vertrauter Ratgeber Friedrichs III. und Mitbegründer der Deutschen Bank, stammt folgendes Zitat: „Wenn neue Projekte vorgelegt wurden und, wie dies regelmäßig geschah, die Vermittler auf dem Papier die schönsten für alle Eventualitäten abgezirkelten Berechnungen zur Befriedigung meines Onkel vorgelegt hatten, und wenn alle meine Einwürfe beseitigt waren, dann pflegte ich zu sagen: >Wir rechnen ohne das Unvorhergesehene.< Worauf er: >Was kann da noch Unvorhergesehenes kommen?< - Worauf ich: >Wenn ich’s sagen könnte, wäre es nicht das Unvorhergesehene.<“, vgl. Koehler Benedikt: Ludwig Bamberger: Revolutionär und Bankier. Stuttgart 1999, S. 76.

Der Spieltisch als Geburtsort der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Glückspiele waren immer eine beliebte Beschäftigung der Menschen. Heutzutage geben die Amerikaner für Glücksspiele mittlerweile mehr Geld aus als für Kino, DVD, CD und Bücher zusammen.

„Das Spiel als eine Herausforderung an den Zufall liegt in der menschlichen Natur“ schrieb Heinrich Hoffmann in seinem *Kur- und Badebuch* (zitiert nach „Bayer. Staatszeitung“ – Unser Bayern 3/2002).

Der römische Schriftsteller Sueton (um 70 bis nach 140) berichtet von einem Epigramm, das da lautet: „Nachdem er zweimal zur See besiegt seine Schiffe verloren hatte, probiert er ständig sein Glück im Würfelspiel, um wenigstens einmal zu siegen.“ (*Aug*. 70,2).

In der Renaissance waren Würfelspiele ein sehr beliebter Zeitvertreib. Die Glücksspiele (Hasardspiele) waren es, die im 16. Jahrhundert den Boden für die Wahrscheinlichkeitsrechnung bereiteten (géométrie du hazard oder aleae geometria).

Wenn der Spieltisch der Geburtsort der Wahrscheinlichkeitstheorie war (Oskar Anderson sen.), dann stand er wohl in Italien. Ein Beitrag von Jochen Zwick in der F.A.Z. vom 4. August 1999 trug den Titel *Wer nicht ins Casino geht, taugt für kein Amt* mit dem Untertitel *Im Glücksspiel versicherte sich Venedigs Adel seiner Selbstsicherheit und seiner Rolle*.

Rudolf Haussner nennt sehr frühe Untersuchungen zu Glückspielen: Libri berichtet in seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, dass sich in einem 1477 in Venedig gedruckten Kommentar zu Dante’s *Divina Commedia* [Göttliche Komödie] Untersuchungen über die Häufigkeit der mit drei Würfeln möglichen Würfe finden.
Luca Pacioli (1445 - 1514) stellte um 1500 die Frage, wie der Spieleinsatz gerecht zu verteilen ist, wenn ein Spiel vorzeitig beendet werden muss.

Von Geronimo Cardano (1501 - 1576) stammt eine Schrift, die sich mit Glücksspielen befaßte. Sie erschien um 1526 mit dem Titel *Liber de Ludo aleae* und behandelte Würfelspiele.

Ein italienischer Edelmann fragte Galilei (1564 - 1642), warum beim Spiel mit drei Würfeln die Gesamtzahl der Augen häufiger 10 als 9 sei. Daraufhin fertigte Galilei eine Tabelle mit den 216 $= 6^3$ Möglichkeiten an (nach der Schrift *Sopra le Scoperte dei Dadi,* die erstmals im Jahr 1718 veröffentlicht wurde).

Bekannter ist die Geschichte von Antoine Chevalier de Méré. Er legte Blaise Pascal (1623 - 1662) im Jahr 1654 eine Reihe von Fragen vor, die sich auf Erfolgschancen gewisser Würfelspiele bezogen. Hierüber korrespondierte Pascal mit Pierre de Fermat (1601 - 1665). Der niederländische Physiker und Mathematiker Christiaan Huygens (1629 - 1695) hörte von den Gesprächen über die Würfelspiele zwischen Pascal und Fermat und wurde so angeregt, sich mit diesem Thema zu befassen. Huygens, der den Inhalt der Gespräche zwischen Pascal und Fermat nicht kannte, verfasste 1656 eine Schrift. Frans van Schooten übersetzte dieses Werk in das Lateinische und nahm sie unter dem Titel *De ratiociniis in ludo aleae* in seine *Exercitationes mathematicae* (1657) auf. Mit dieser Schrift von Huygens wurde die Mathematik um einen neuen Zweig, die sog. Wahrscheinlichkeitsrechnung, bereichert (Rudolf Wolf in seiner *Geschichte der Astronomie* aus dem Jahr 1877).

Diese Abhandlung von Huygens[1] – einer der bedeutendsten und vielseitigsten Physiker und Mathematiker seiner Epoche – blieb lange die einzige Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre. Nebenbei sei erwähnt, dass Gottfried Wilhelm Leibniz

1 Anlässlich der planmäßigen Landung der europäischen Raumsonde Huygens auf dem Saturnmond Titan am 14. Januar 2005 nach einem rund siebenjährigen Flug, sei an die Entdeckung des hellsten Saturnmonds durch Christiaan Huygens im Jahr 1655 erinnert.

nach einer Begegnung mit Huygens sich veranlasst sah, seine Kenntnisse in der höheren Mathematik zu vertiefen. Aus dem Lernenden wurde ein Meister: 1675 erfand Leibniz die Infinitesimalrechnung auf eigenem Weg und unabhängig von Newtons Fluxionsrechnung.

Chrstiaan Huygens und Jakob Bernoulli die Begründer der Wahrscheinlichkeitstheorie

Im Wesentlichen begründeten die Wahrscheinlichkeitstheorie Christiaan Huygens (1629 - 1695) und Jakob Bernoulli (1655 - 1705). Während Huygens sich mit Glücksspielen befaßte, spielte für Jakob Bernoulli der Begriff der Wahrscheinlichkeit auch im menschlichen Leben und im Rechtswesen eine Rolle. Einzufügen ist hier die Wette von Blaise Pascal (1623 - 1662). Nach dessen Auffassung läuft der Glaube an Gott auf eine Wette hinaus und er begründete dies in Anlehnung an die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das für die Wahrscheinlichkeitsrechnung bedeutende Werk von Jakob Bernoulli (1655[2] - 1705), das unvollendet blieb, wurde 1713 posthum veröffentlicht. Der Titel dieser Schrift lautete *Ars Conjectandi* (Kunst der Mutmaßung). In diesem Werk taucht auch die Formulierung „Ars Conjectandi sive Stochastice“ auf. Der letzte Begriff stammt vom Griechischen Verbum στοχάζεσθαι (stocházesthai) [u. a. das Ziel treffen; erraten, vermuten, ahnen]. Das Werk Bernoullis befasste sich nicht nur mit Glücksspielen. So trägt der vierte Teil die Überschrift „Anwendung der vorhergehenden Lehre auf bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse.“

Kunst des Mutmaßens

Im täglichen Leben fußen viele Tätigkeiten auf Vermutung. Dabei mögen gewisse Entscheidungen auch nur intuitiv getroffen worden sein. Viele seiner Entscheidungen hat der Mensch von den Bahnen der Himmelskörper lenken lassen.

In der Seefahrt wurde die genaue Bestimmung des Längengrades erst im 18. Jahrhundert möglich (Seeuhr von John Harrison). In diesem Kontext ist ein Bericht von Plinius d. Ä. (23 - 79) erwähnenswert: „Nach den Sternen richtet man sich hier bei der Schiffahrt nicht; das Siebengestirn sieht man nicht mehr. <Viel mehr> nimmt man Vögel mit, die man von Zeit zu Zeit fliegen lässt und deren nach dem Land strebendem Flug man dann folgt. Auch fährt man höchstens vier Monate im Jahr zur See.“, vgl. Naturkunde VI Geographie Asien XXIV 83 (Hrsg. und übers. von Kai Brodersen, 1996).

Die Bewertung von Objekten kommt in Ciceros Schrift *Paradoxa Stoicorum* (VI 51) zur Sprache: „Wenn nämlich diese schlauen Sachverständigen in Vermögensfragen Wiesen und bestimmten Grundstücken einen hohen Wert beimessen, weil diese Art von Vermögen sozusagen den geringsten Schaden erleiden kann, wie hoch ist dann die Tugend zu bewerten, die weder jemals geraubt noch gestohlen werden kann, weder durch Schiffbruch noch durch Feuer verloren geht und weder durch die Gewalt der Stürme noch durch stürmische Zeiten verändert wird?“

Für den Pragmatismus der Römer spricht das Modell von Ulpian zur Abschätzung der Dauer einer Leistung für bestimmte Altersgruppen. Es sollte aber noch rund 1500 Jahre dauern bis der berühmte Astronom Edmund Halley eine Absterbeordnung vorlegte (1693).

G. W. Leibniz schrieb um 1680: „Da es aber niemanden gibt, der uns das Lebensende vorhersagen könnte, muss man zu Vermutungen zurückkehren, die von zweierlei Art sind, die einen nämlich haben eine gewisse sichere und mathematische Schätzung ihrer Wahrscheinlichkeit, die anderen aber sind unbestimmter und unsicher.“

Jakob Bernoulli war wohl der erste, der die Bedeutung der „Kunst des Mutmaßens“ hervorhob. Im vierten Teil Kapitel II seines Werkes unterscheidet Jakob Bernoulli zwischen Wissen und Vermuten. Unter anderem heißt es dort: „Irgend ein Ding vermuthen heisst soviel als seine Wahrscheinlichkeit messen. Deshalb bezeichnen wir als Vermuthungs- oder Muthmaassungskunst (ars conjectandi sive stochastice) die Kunst, so genau als möglich die Wahrscheinlichkeiten der Dinge zu messen und zwar zu dem Zwecke, dass wir bei unseren Urtheilen und Handlungen stets das auswählen und befolgen können, was uns besser, trefflicher, sicherer oder rathsamer erscheint. Darin allein beruht die ganze Weisheit des Philosophen und die ganze Klugheit des Staatsmannes.“ (R. Haussner).

Aus Kapitel IV im vierten Teil sei folgende Stelle zitiert: „Aber ein anderer Weg steht uns hier offen, um das Gesuchte zu finden und das, was wir *a priori* nicht bestimmen können, wenigstens *a posteriori*, d.h. aus dem Erfolge, welcher bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde, zu ermitteln.“

2 Geboren am 6. Januar 1655 (27. Dezember 1654 alten Stils).

So erkannte Jakob Bernoulli, dass man Sterbens- und Überlebenswahrscheinlichkeiten nicht a priori berechnen, sondern nur aus Erfahrung schätzen kann und hierzu braucht man eine Sterbetafel. Sein Neffe Nikolaus Bernoulli (1687 - 1759) wandte sich im Zusammenhang mit Versicherungsprämien gegen die Einwände, man könne mit Menschen nicht wie mit Waren rechnen. Er brachte zum Ausdruck, dass man nur mit der Wahrscheinlichkeit der Dauer des menschlichen Lebens rechne.

Erwartungswert

Christiaan Huygens (1629 - 1695) betrachtete das arithmetische Mittel unter dem Gesichtspunkt der mathematischen „Erwartung" oder „Hoffnung". Für Jakob Bernoulli (1655 - 1705), auf den das „Gesetz der großen Zahlen" in seiner ursprünglichen Fassung zurückgeht, war der Mittelwert nur dann bedeutungsvoll, wenn ein Zufallsexperiment sehr oft wiederholt wird. Eine Vorstellung vom Gesetz der großen Zahlen hat schon Peter Süßmilch (1707 - 1767) gehabt (*Die göttliche Ordnung ...*).
Siméon Denis Poisson (1781 - 1840) hat „Das Gesetz der großen Zahlen" (loi des grands nombres) begründet.

Leibniz schrieb in einem Brief (April 1705) an Jakob Bernoulli: „…, nämlich dass das arithmetische Mittel zwischen gleich Ungewissem genommen wird, welcher Grundlage sich sowohl die Landleute bedienen, wenn sie den Wert der Grundstücke abschätzen, als auch die Steuerbeamten, wenn sie die mittleren Einkünfte des Vorstehers von Ämtern festsetzen, wenn sich dafür ein Pächter anbietet." (Biermann und Faak).

Bei der Bewertung von Leibrenten befasste sich Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) mit der Schätzung der menschlichen Lebensspanne, wobei er sich an einer arithmetischen Folge orientierte, ohne dies so zu benennen.

Arithmetisches Mittel für Bewertungsprobleme (Braunschweiger Teilung)

Mit Teilungsproblemen waren die Menschen immer konfrontiert (gerechte Aufteilung der Beute oder Ernte, Erbteilungsaufgaben). So hat das arithmetische Mittel nicht nur in der Statistik eine weite Verbreitung gefunden.

Leibniz erwähnte die „Braunschweiger Teilung" für die Wertfeststellung eines Erbes, Hauses oder eines anderen Gutes. Er schilderte die rechtsgültige Gewohnheit der Bauern von Braunschweig-Lüneburg, drei Gruppen von Schätzern zu bilden, die sie die 3 Schürzen (Schurzen) nennen. Aus drei Schätzungen wurde dann ein Mittelwert errechnet.

In der *Abhandlung über die Buchhaltung 1494* von Luca Pacioli wird berichtet: „... so holte man ein Gutachten eines erfahrenen Schätzers ein oder im Zweifelsfalle von mehreren, von denen man dann den Durchschnitt nahm."

Exkurs: Statistik

Die Herkunft des Begriffs Statistik ist nicht ganz klar. Als Namensgeber der Statistik wird Martin Schmeitzel (1679 - 1747) genannt: „collegium politico-statisticum". Auch sein Schüler Gottfried Achenwall (1719 - 1772) wird als Namensgeber genannt. Dies geht auf seine Vorlesung über Staatenkunde mit dem Titel „Notitia politica vulgo statistica" im Jahr 1748 zurück. Diese Staatenkunde hat mit der modernen Statistik nur den Namen gemeinsam. Nach Günter Menges leitete Achenwall den Begriff Statistik von „ragione di Stato" und „statista" ab, wie eine handschriftliche Notiz zeigt.

In England entstand die „Politische Arithmetik", die ausgehend von Geburts- und Sterbezahlen, die zahlenmäßige Entwicklung der Bevölkerung zu beobachten versuchte. Schon John Graunt (1620 - 1674) stellte die relative Häufigkeit der Knabengeburten fest: 139 782 Söhne und 130 866 Töchter, also 1 068 zu 1 000. Damals war aber die Testtheorie noch nicht entwickelt und so konnte nicht beurteilt werden, ob die Beobachtung von Graunt wesentlich oder zufällig war. In Deutschland waren Wegbereiter der Bevölkerungsstatistik Caspar Neumann (1648 - 1715) und Peter Süßmilch (1707 - 1767). Die Aufzeichnungen über Geburten und Todesfälle der Stadt Breslau von Caspar Neumann verwendete Edmond Halley (1656 - 1742) für seine erste „Absterbeordnung" (Überlebendentafel) im Jahr 1693. Hingewiesen sei hier auf die 28 Fragen von G. W. Leibniz, die er 1682 unter der Überschrift „Fragen der politischen Rechnung zum Leben der Menschen sowie verwandte [1682]" zusammengefasst hatte, vgl. Leibniz, S. 521.

Stochastisch

Der Begriff Stochastik wurde von Jakob Bernoulli eingeführt und erst wieder von L. von Bortkiewicz 1917 aufgegriffen. Dem Lexikon der Mathematik kann entnommen werden: Stochastik, zusammenfassende Bezeichnung für die Disziplinen Wahrscheinlichkeitstheorie und (mathematische) Statistik. Günter Menges definierte dieses Wort kurz und bündig im 1. Band (Theorie) seiner Schrift *Grundriß der Statistik*: „Alles, was auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgebaut ist oder sonstwie mit ihr zu tun hat, bezeichnet man als „Stochastik“. Erwin Kreyszig erklärt diesen Begriff so: „Stochastisch“ bedeutet ganz allgemein „mit Zufallsexperimenten und Wahrscheinlichkeiten zusammenhängend“.

Ein Vorgang wird stochastisch genannt, wenn der einzelne Ausgang nicht vorhersagbar ist, jedoch die Struktur vieler individueller Ergebnisse auf lange Sicht absehbar ist. So gelten viele Phänomene als stochastisch, wie zum Beispiel das Lebensalter einer Person mit einer Leibrente.

Eine im voraus berechenbare Wahrscheinlichkeit heißt apriorisch (zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine 1 zu werfen gleich 1/6), aposteriorisch oder empirisch eine Wahrscheinlichkeit, die auf Grund von Beobachtungen bestimmt worden ist. Zu beachten ist, dass es sich bei den Glücksspielen um eine Wahrscheinlichkeit a priori handelt, während man zum Beispiel bei Sterbefällen mit Hilfe schon abgelaufener Vorgänge eine Wahrscheinlichkeit a posteriori ermittelt.

Börsenkurse mögen wie ein Würfelwurf als zufällig betrachtet werden, es besteht aber ein entscheidender Unterschied bei diesem Vergleich. Der Würfel bleibt von den vorangegangenen Ergebnissen unbeeinflusst, weil er kein Gedächtnis hat. Dagegen sind die Handlungen der Börsenteilnehmer von den vergangenen und augenblicklichen Ereignissen sehr wohl betroffen, wodurch ihre Wahrnehmung der aktuellen Lage die Zukunftserwartungen maßgeblich beeinflussen werden.

Louis Bachelier - kein Mann seiner Gegenwart

Benoît Mandelbrot (geb. 1924)[3], der den Begriff „Fraktal“ prägte, schrieb über Louis Bachelier (1870 - 1946): „Die Tragödie von Bachelier bestand darin, dass er ein Mann der Vergangenheit und der Zukunft, nicht aber seiner Gegenwart war. Ein Mann der Vergangenheit deshalb, weil er über die historischen Wurzeln der Wahrscheinlichkeitstheorie – die Glückspiele - arbeitete. Zur Einführung stochastischer Prozesse mit stetiger Zeit wählte er den Weg über die stetige Form der Glücksspiele, *La Bourse* [die Börse]. Ein Mann der Zukunft war er sowohl in der Mathematik (der Brief von Lévy legt darüber Zeugnis ab) als auch in der Ökonomie, wo er als der Schöpfer des wahrscheinlichkeitstheoretischen Konzepts des „Martingals“ (das ist die geeignete Formulierung für ein *faires Spiel* oder einen *effizienten Markt*) anerkannt ist.“

Mandelbrot resümiert: „Den größten Ruhm verdankt Bachelier seinem Konzept, dass sich die Preise wie eine Brown’sche Bewegung verhalten.“ Außerdem hebt Mandelbrot hervor, dass ein gehöriger Teil der mathematischen Ergebnisse zur Brown’schen Bewegung schon fünf Jahre vor Einstein detailliert beschrieben wurde, nämlich durch Louis Bachelier *(Dictionary of Scientific Biography,* I, 366 - 367). Nach den Ausführungen von Mandelbrot stand im Mittelpunkt dieser Geschichte eine im Jahr 1900 in Paris verteidigte Doktordissertation in den mathematischen Wissenschaften, die die Prüfungskommission nicht sonderlich beeindruckte. Zu dieser Dissertation (*Théorie de la Spéculation*) bemerkte Mandelbrot 2005 (S. 80): „Seine Doktorarbeit legte den Grundstein für die Finanztheorie und – weit allgemeiner – für die Theorie aller Formen zufallsbestimmter Veränderung im Zeitkontinuum.“

Die Brown’sche Bewegung dient heute als mathematisches Modell für Zufallsprozesse. Bernhard H. Lavenda brachte in seinem 1985 publizierten Aufsatz *Die Brown‘sche Bewegung* („Spektrum der Wissenschaft“ 4/1985) zum Ausdruck, dass sich in jüngerer Zeit aus dem Studium der Brown’schen Bewegung wichtige mathematische Techniken zur allgemeinen Untersuchung von Zufallsprozessen ergaben. „Diese Techniken setzte man zur Regelung von elektromagnetischem >Rauschen< ein; sie trugen ferner zum Verständnis der Dynamik von Sternhaufen, der Entwicklung von ökologischen Systemen und des Verhaltens von Aktienkursen bei.“, schreibt Lavenda.

Exkurs: Brown’sche Bewegung

Der Botaniker Robert Brown (1773 - 1858) machte 1827 eine weitreichende Entdeckung. Er beobachtete unter dem Mikroskop eine unregelmäßige Bewegung bei Pollen, die sich in einer Flüssigkeit befanden. Dieses Phänomen wurde nach ihm benannt.

Erzeugung einer einfachen Brown’schen Linie

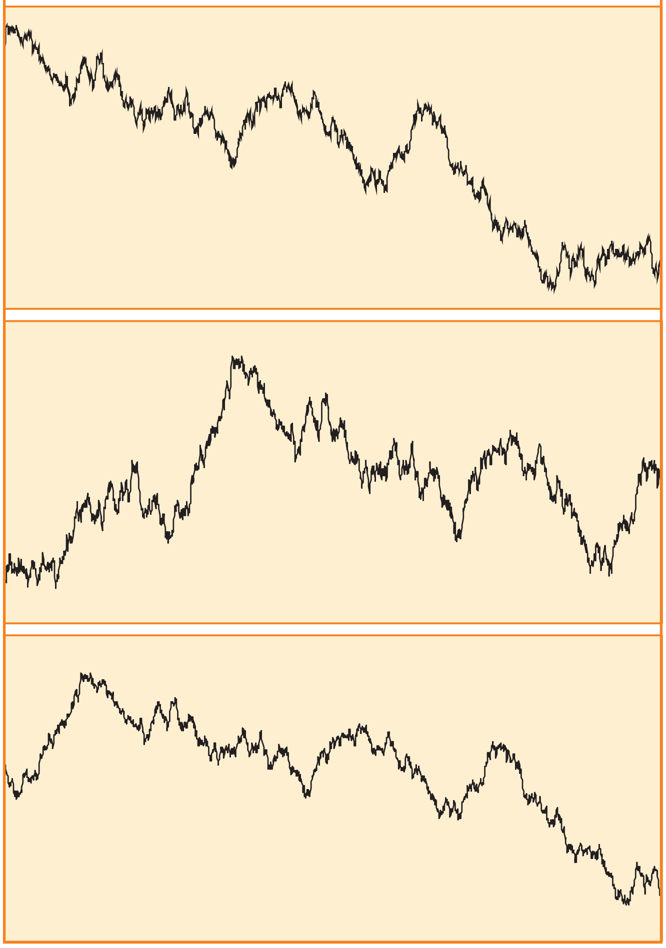
Um die einfachste Art einer Brown’schen Linie zu erhalten, genügt nach Hans Lauwerier (*Fraktale*, Hückelhoven 1989) die Unterteilung eines Geradenstücks in eine beliebige Anzahl von Punkten und die Erzeugung von Pseudo-Zufallszahlen mit Werten zwischen 0 und 1. Diese werden so umgeformt, dass sie zwischen -0,5 und +0,5 liegen. Mit einem Faktor lässt sich die Stärke der Pseudo-Zufallszahl beeinflussen. Je-

3 Mandelbrot war von 1958 bis 1993 am Thomas-J.-Watson-Forschungszentrum von IBM tätig. Für die Entwicklung der fraktalen Geometrie der Natur wurde Mandelbrot 1985 von der Columbia University die „Barnard Medal of Meritorious Service to Science“ verliehen, eine sehr seltene Auszeichnung, die vor ihm z.B. Einstein, Bohr, Heisenberg, den Curies und Fermi zuteil wurde. Eine von ihm 1967 veröffentlichte Arbeit trug den Titel „Wie lang ist die Küste Britanniens?“

der neu gebildete Wert wird zum vorhergehenden addiert. Die so erzeugte Linie kann man sich z.B. als Küstenlinie vorstellen. Lauwerier dachte an eine graphische Darstellung von Gewinn und Verlust von zwei Teilnehmern an einem Glückspiel.

Auf diese Art wurden drei „künstliche Linien" erzeugt (s. Abb. 1). Als „Zufallszahlen-Generator" wurde die Zahl π benutzt. Zu diesem Zweck wurden zunächst rund 9 600 Nachkommastellen der Zahl π unter Anwendung des „Tröpfel-Algorithmus" von Stanley Rabinowitz und Dik T. Winter erzeugt. Sodann wurden jeweils vier Nachkommastellen zu einer Zahl zusammengefasst, so dass rund 2 400 vierstellige „Zufallszahlen" zur Verfügung standen. Aus diesem Bestand wurden Daten für die Erstellung der in Abbildung 1 dargestellten Kurven ausgewählt.

Abb. 1 **Brown´sche Linien oder echte Zeitreihen?**



Zur Erzeugung von (Pseudo-) Zufallszahlen sei angemerkt:
Als einfache Einrichtung für die Erzeugung von Folgen zufälliger Zahlen helfen: Urnen, Würfel und Rouletts. Als Zufallszahlen-Generator kann auch die Zahl π verwendet werden. Die Nachkommastellen von π eignen sich in hervorragender Weise hierfür. Mit einem Rechner können echte Zufallszahlen im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht erzeugt werden. Jetzt kann auf von unvorhersehbaren physikalischen Phänomenen (Quanteneffekte oder Rauschen) abgeleitete Werte zurückgegriffen werden, vgl. „Innovate! Das Magazin für Forschung und Technologie", Ausgabe September 2005, S. 18ff.

Heisenberg zur Statistik

In *Gespräche über das Verhältnis zwischen Biologie, Physik und Chemie (1930 - 1932)* stößt man auf einen bemerkenswerten Dialog, der hier wiedergegeben wird.
Oskar Klein: „Ist es nicht merkwürdig, dass Einstein so große Schwierigkeiten hat, die Rolle des Zufälligen in der Atomphysik zu akzeptieren? Er kennt doch die statistische Wärmelehre besser als die meisten anderen Physiker, und er hat selbst eine überzeugende statistische Ableitung des Plankschen Gesetzes der Wärmestrahlung gegeben. Fremd können ihm solche Gedanken also sicher nicht sein. Warum fühlt er sich dann gezwungen, die Quantenmechanik abzulehnen, nur weil das Zufällige in ihr eine grundsätzliche Bedeutung gewinnt?"
Darauf antwortete Werner Heisenberg: „Es ist natürlich gerade dieses Grundsätzliche, was ihn stört. Dass man etwa bei einem Topf voll Wasser nicht weiß, wie alle einzelnen Wassermoleküle sich bewegen, ist selbstverständlich. Daher kann sich niemand darüber wundern, dass wir Physiker hier Statistik treiben müssen, so wie etwa eine Lebensversicherungsgesellschaft über die Lebenserwartung ihrer vielen Versicherten statistische Rechnungen anstellen muss. (…)"; vgl. Heisenberg, Werner: Der Teil und das Ganze: Gespräche im Umkreis der Atomphysik. 5. Auflage. München 2003, S. 126.

Das arithmetische Dreieck (bekannt als Pascal'sches Dreieck)

Erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts wurde das arithmetische Dreieck (bekannt als Pascal'sches Dreieck) zum Ausgangspunkt für drei Zweige der Mathematik[4] (Studium der unendlichen Reihen, der Kalkül mit endlichen Differenzen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung). Das arithmetische Dreieck ist eine Hilfstafel, der man bekanntlich die Koeffizienten der Entwicklung von $(a + b)^n$ entnehmen kann. Man spricht auch vom Dreieck der Binomialkoeffizienten.

4 Nebenbei sei angemerkt, dass der Satz von Frank Morley erst in das Jahr 1899 fällt: Das Dreieck, das durch Winkeldreiteilung entsteht, ist das Morley-Dreieck, das stets gleichseitig ist.

Gewöhnlich werden die Binomialkoeffizienten in Form eines gleichschenkligen Dreiecks angeordnet. Es handelt sich dabei um die Koeffizienten des Binoms $(a + b)^n$. Mit dem arithmetischen Dreieck, das mit vielen Gebieten der Mathematik vernetzt ist, lassen sich die Eigenschaften des binomischen Lehrsatzes veranschaulichen.

Jedermann ist der Ausdruck $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ bekannt. Mit der Schreibweise des Binoms $(a + b)^n$ lässt sich Zeit gewinnen und man behält den Überblick.

Zur Konstruktion des arithmetischen Dreiecks

Das Bildungsgesetz dieser Koeffizienten wird im Folgenden leicht erkennbar:

1 1	1 2 1	1 3 3 1	1 4 6 4 1
1 1	1 2 1	1 3 3 1	1 4 6 4 1
1 2 1	1 3 3 1	1 4 6 4 1	1 5 10 10 5 1

Die so gebildeten Zahlen entsprechen den Zeilen 3 bis 6 im arithmetischen Dreieck.

Erklärung des Arithmetischen Dreiecks

Abbildung 2 zeigt das arithmetische Dreieck bis $n = 10$. Man erhält jede gesuchte Zahl, wenn man die links und rechts über ihr stehenden addiert; zum Beispiel $10 = 4 + 6$.

Jede Zahl ist gleich der Summe aller Zahlen der linken oder rechten Schrägzeile, beginnend mit der links oder rechts über ihr stehenden Zahl; zum Beispiel

$10 = 4 + 3 + 2 + 1$ oder $10 = 6 + 3 + 1$.

Jede Schrägzeile ist eine *arithmetische Folge* höherer Ordnung; zum Beispiel:

1. Schrägzeile: 1, 1, 1, 1, 1, . arithmetische Folge 0. Ordnung
2. Schrägzeile: 1, 2, 3, 4, 5, … arithmetische Folge 1. Ordnung
3. Schrägzeile: 1, 3, 6, 10, 15, … arithmetische Folge 2. Ordnung

usw.

Die dem arithmetischen Dreieck unschwer zu entnehmenden Binomialkoeffizienten helfen, Kombinationen zu berechnen. Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen beruhen auf der Analyse von Permutationen und Kombinationen der vorkommenden Elemente. Damit erhält man die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k Elemente herauszugreifen.

Ein Lesebeispiel für $\binom{n}{k}$: Für $n = 6$ und $k = 3$ erhält man als Ergebnis 20.

Ein Beispiel für: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Diesem Dreieck lassen sich die Zufallswahrscheinlichkeiten von Ereignissen leicht entnehmen. So erhält man z.B. die Wahrscheinlichkeit für die beim Fall von 2 Münzen auftretenden Möglichkeiten (zweimal Wappen, Wappen und Zahl, zweimal Zahl: 1/4, 2/4, 1/4).

Berechnung des Binomialkoeffizienten

Der Binomialkoeffizient kann auch mit folgender Formel berechnet werden: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Mit n! wird abkürzend das Produkt der positiven ganzen Zahlen von 1 bis n bezeichnet und Fakultät genannt, also $n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$; für 0! gilt 1. Von James Stirling (1692 - 1770) stammt die Näherungsformel $n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$.

Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ kann auch mit Hilfe der Logarithmen annähernd berechnet werden. Hilfreich ist dabei eine Tabelle, die die Fakultäten und ihre Zehnerlogarithmen ausweist.

Zum Beispiel: $\lg \binom{35}{17} = \lg 35! - \lg 17! - \lg 18! =$
$40{,}01423 - 14{,}55107 - 15{,}80634 = 9{,}65682$,
also 4 537 535 126 oder 4 537 567 652 (Taschenrechner HP-41CX) gegenüber dem exakten Wert 4 537 567 650.

Binomialverteilung

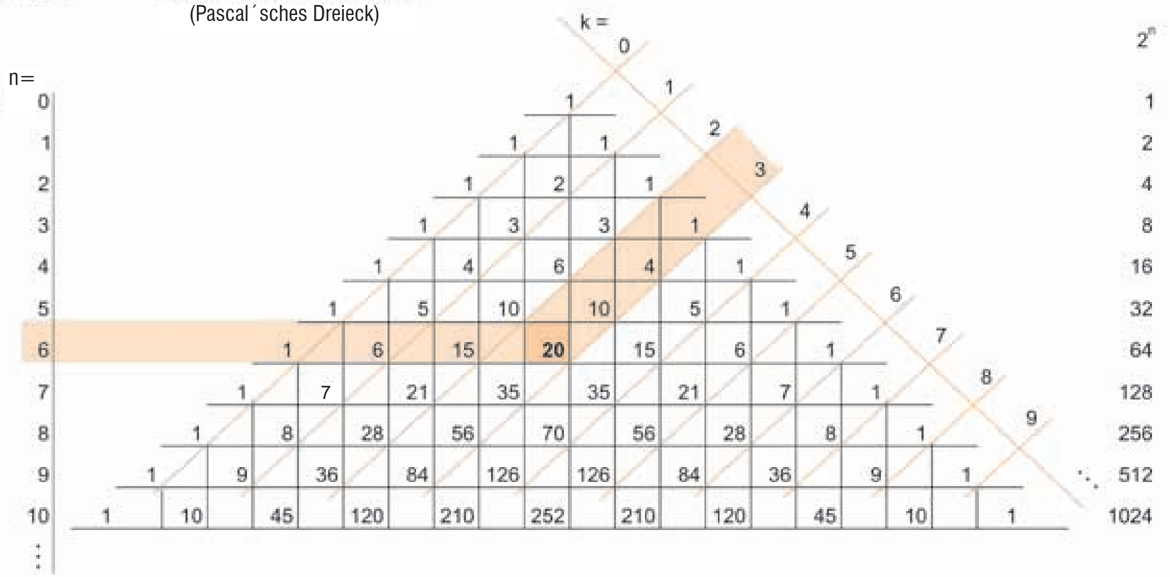
Es sei die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses p und die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis nicht eintritt, $q = 1 - p$ $(0 \le p \le 1)$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis in n unabhängigen Versuchen xmal eintrifft, durch das Verteilungsgesetz der Binomialverteilung gegeben:

$$P_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

Für kleine Werte von n und x ist die Binomialverteilung praktikabel. Für große Werte wird je nach der Aufgabenstellung entweder die Poissonverteilung oder die Normalverteilung angewendet. Von Abraham de Moivre (1667 - 1754) wurde der Zusammenhang zwischen Binomialverteilung und Normalverteilung erkannt und 1718 in seinem Werk *The Doctrine of Chances* publiziert.

Beispielsweise lässt sich aus der Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt $p = 0{,}515$ mittels der Binomialverteilung berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer Familie mit

Abb. 2 **Das arithmetische Dreieck** (Pascal´sches Dreieck)



z.B. vier Kindern ein Knabe und drei Mädchen, zwei Knaben und zwei Mädchen, drei Knaben und ein Mädchen oder lauter Knaben zu erwarten sind.

Man kann auch die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass aus einer Gruppe von zum Beispiel zehn Gleichaltrigen innerhalb des nächsten Jahres niemand, genau eine Person, mindestens eine Person, nicht mehr als eine Person oder mehr als eine Person stirbt.

Galton'sches Brett

Die Binomialverteilung kann auch am Modell eines „Römischen Brunnen" dargestellt werden. Ein mechanisches Modell zur Demonstration und Veranschaulichung der Binomialverteilung ist ein Galtonbrett (nach Francis Galton, 1822 - 1911), das auch als Zufallsapparat bezeichnet wird, s. Abb. 3.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel im Fach x unten ankommt, ist $f(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Dabei werden bei n Nagelreihen n+1 Fächer benötigt. Bei fünf Nagelreihen würde man in sechs Fächern von links nach rechts $\frac{1}{32}, 5 \cdot \frac{1}{32}, 10 \cdot \frac{1}{32}, 10 \cdot \frac{1}{32}, 5 \cdot \frac{1}{32}, \frac{1}{32}$

aller Kugeln finden. In diesem Zusammenhang wird auf die sechste Zeile im arithmetischen Dreieck hingewiesen (1, 5, 10, 10, 5, 1); die Summe der in dieser Zeile ausgewiesenen Binomialkoeffizienten beläuft sich auf 32 ($=2^5$).

Poisson-Verteilung

Diese Verteilung wird dann angewendet, wenn ein Ereignis sehr selten eintritt. Man erhält die Poisson-Verteilung durch einen Grenzübergang aus der Binomialverteilung. Ein klassisches Beispiel für eine Poisson-Verteilung (von S.D. Poisson 1837 eingeführt) ist der Tod von Soldaten durch Pferdehufschlag.

Wachstumsfunktion und Binomischer Lehrsatz

Die Binomialkoeffizienten lassen sich auch für die Darstellung einer Wachstumsfunktion heranziehen – solange die Anzahl der Jahre nicht groß ausfällt. So kann man fragen, wie sich eine Größe (z.B. Kapital, Bevölkerungsstand, Holzbestand) nach n Jahren entwickelt, wenn ihr eine konstante jährliche Zuwachs- oder Schrumpfungsrate zugrunde liegt. Es gilt: $(a + b)^n$, wobei a = 1 und b = p/100. Zur Veranschaulichung ein Beispiel (zwei Prozent für vier Jahre): b = 2/100. Für die Anzahl der Jahre werden die Binomialkoeffizienten (fünfte Zeile des arithmetischen Dreiecks) herangezogen: 1, 4, 6, 4, 1. Somit lautet die Rechnung:

$a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4 = 1{,}082$ oder 8,2 %.

Die Überlegenheit der logarithmischen Berechnung braucht nicht besonders herausgestellt zu werden.

Die Zahl e und der binomische Lehrsatz

Aus der *Geschichte der Mathematik* von Becker und Hofmann (Bonn 1951) sei folgende Textstelle von Seite 231 wie-

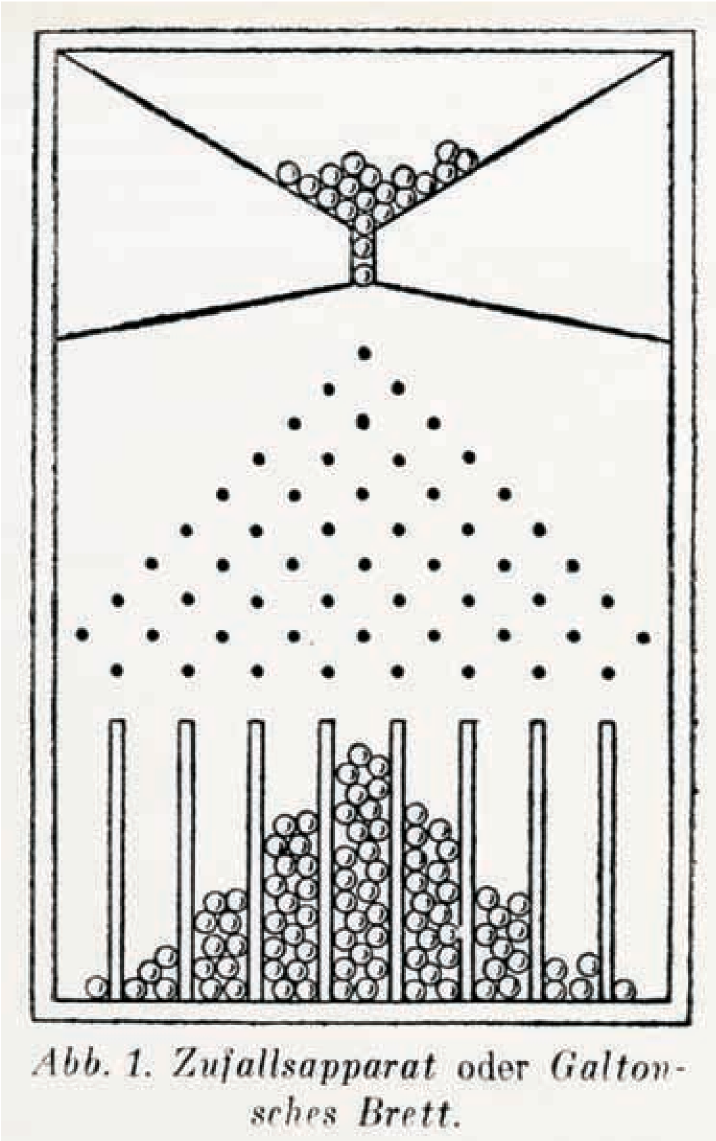


Abb. 3 Zufallsapparat oder Galton'sches Brett. Aus: Flaskämper, Paul: Allgemeine Statistik. Hamburg 1962 (Nachdr. d. 2. Aufl. von 1949).

dergegeben: „…, wobei er [Euler] mit D. Bernoulli (1728) e als Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und in Wiedergabe eigener Studien e^x als Grenzwert von $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ im Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz erklärt."

Historisches zum arithmetischen Dreieck

Nach diesen Ausführungen zum arithmetischen Dreieck soll dessen Geschichte noch skizziert werden. Die erste bekannte Darstellung des arithmetischen Dreiecks im christlichen Abendland ziert die Titelseite der „Kauffmanß Rechnung" von Peter Apian, die 1527 in Ingolstadt gedruckt wurde (siehe Abbildung 4). Zuvor tauchte diese Darstellung in einem chinesischem Traktrat von Chu Shih-Chieh aus dem Jahr 1303 auf. Georges Ifrah zeigt in seiner *Universalgeschichte der Zahlen* ein arithmetisches Dreieck mit ostarabischen Ziffern. Eine Anmerkung weist darauf hin, dass die gezeigte Tafel von dem Mathematiker Al-Karaji übernommen wurde, der Ende des 10. oder Anfang des 11. Jahrhunderts geboren wurde. Nach Dörrie wurde der binomische Satz wahrscheinlich von dem arabischen Astronomen Omar Alchaijâmî entdeckt, der im ersten Viertel des 11. Jahrhunderts zu Bagdad lebte (Dörrie, Heinrich: Triumph der Mathematik. Würzburg 1958, S. 36).

Vor Pascal und Jakob Bernoulli hat Michael Stifel (1487 - 1567) die Binomialkoeffizienten in seiner 1544 veröffentlichten *Arithmetica integra* dargestellt (siehe Abbildung 5).

Pascal hat über diese Zahlen ein Traktat verfasst, das posthum in der Mitte des 17. Jahrhunderts (1665) veröffentlicht wurde (*Traité du Triangle Arithmétique*, …). Dieses Werk kannte Jakob Bernoulli nicht. Zu Beginn seiner „Permutations- und Combinationslehre" bemerkte Bernoulli: „Daher haben auch einige bedeutende Männer: Schooten, Leibniz, Wallis, Prestet sich mit diesem Gegenstande beschäftigt, was wir erwähnen, um der irrthümlichen Annahme vorzubeugen, dass alles neu sei, was wir vorzutragen beabsichtigen. Jedoch haben wir auch verschiedene eigene Resultate von nicht zu unterschätzender Bedeutung hinzugefügt, so besonders den allgemeinen und leichtverständlichen Beweis für die Eigenschaften der figurirten Zahlen; auf diesen, welcher unseres Wissen noch von Niemand vor uns gegeben oder gefunden ist, stützen sich viele weitere Resultate." (R. Haussner).

In einer Bemerkung von Jakob Bernoulli heißt es: „Viele haben sich schon, wie ich an dieser Stelle bemerken möchte, mit Betrachtungen über figurirte Zahlen beschäftigt (unter ihnen Faulhaber und Remmelin aus Ulm, Wallis, Mercator in seiner „Logarithmotechnia", Prestet und andere), aber ich weiß keinen, welcher einen allgemeinen und wissenschaftlichen Nachweis dieser Eigenschaft gegeben hat. (…)." (R. Haussner).

Muster im arithmetischen Dreieck

Bei Untersuchungen über die Teilbarkeit der Binomialkoeffizienten entdeckte man, dass im Pascal'schen Dreieck (arithmetischen Dreieck) interessante Muster entstehen, vgl. Peitgen, Jürgens und Saupe: Chaos: Bausteine der Ordnung. Reinbek bei Hamburg 1998, Kapitel 7. In Abbildung 6 wurden die Binomialkoeffizienten, die ohne Rest (modulo) durch drei teilbar sind als „•" dargestellt. Dieser Abbildung liegen die ersten 35 Zeilen des arithmetischen Dreiecks zugrunde. Die Bino-


Eyn Newe
Vnnd wolgegründte
vnderweysung aller Kauffmanß Rech-
nung in dreyen büchern/mit schönen Re
geln vñ fragstucken begriffen. Sunder-
lich was vortl vnnd behendigkait in der
Welschē Practica vñ Tolletn gebraucht
wirdt/des gleychen fürmalß weder in
Teützscher noch in Welscher sprach nie
gedrückt. durch Petrum Apianũ
von Leyßnick/d Astronomei
zů Ingolstat Ordina-
riũ/verfertiger.

Abb. 4 Links unten im Bild: Eine der frühesten Darstellungen des arithmetischen Dreiecks im christlichen Abendland.
Aus: Apian, Peter: Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung … . Nachdruck von 1995 der Ausgabe Ingolstadt 1527.

MICHAELIS STIFELII

295156026357216 1, hæc est summa prouenicns ex additione omnium horum, tollitq; punctum remanens.

De inuentione numerorum, qui peculiariter pertinent ad suas species extractionum.

REstat iam ut tradam modum inueniendi numeros, qui peculiariter pertinent ad quamlibet speciem extractionum, quatenus perfecta habeatur & absoluta huius negotij consummatio. Tradam autem huiusmodi inuentionẽ, per tabulam sequentem, quæ ut in infinitum extendatur tuipse facile uidebis, quum primum uideris rationem qua construitur. Sic autem constructam uides.

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Primo, à latere sinistro descendit naturalis numerorum progressio, quam extendere poteris quantũ uolueris. Et illa radix est sequentium laterum omnium. Nam secundum latus, quod continet numeros trigonales, sic oritur ex primo latere. Duo-bus

Abb. 5   Aus: Stifel, Michael: Arithmetica integra. Nürnberg 1544.

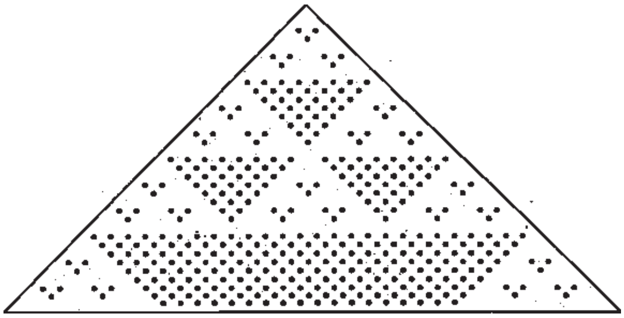
mialkoeffizienten wachsen stark an, wenn der Zeilenindex n erhöht wird. Zum Beispiel ergibt der Ausdruck $\binom{35}{17}$ die Zahl 4 537 567 650 (s. S. 95).

Zum Mythos Fibonaccizahlen: Das arithmetische Dreieck

Zweifelsfrei hat sich die Dreiecksform für die Darstellung der Binomialkoeffizienten bewährt. Es ist aber nicht zwingend diese Gestalt zu wählen. Jakob Bernoulli hatte für diese Zahlen eine eigene Anordnung gewählt. Er überschrieb seine Zahlenanordnung mit „Tabula Combinationum, seu Numerorum Figuratorum“ (R. Haussner übersetzte dies mit „Tafel der figurirten Zahlen“). Figurierte Zahlen sind Dreiecks-, Pyramidenzahlen usw.

Die von Jakob Bernoulli gewählte Anordnung der Binomialkoeffizienten könnte aufklären helfen, wie Leonardo von Pisa (etwa 1180 bis nach 1240), genannt Fibonacci, die nach ihm

Abb. 6 **Die Binomialkoeffizienten im Pascal'schen Dreieck, die durch 3 ohne Rest teilbar sind, wurden durch einen Punkt „•“ gekennzeichnet.** (Berechnungen des Verfassers)



benannten Zahlen entdeckt haben könnte. Abbildung 7 verdeutlicht dies: Der untere Teil entspricht dem Tabellenaufbau von Jakob Bernoullli und der obere Teil zeigt die „Fibonacci-Zahlen“ (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …). In dieser Abbildung wurden schräg verlaufende Linien eingezeichnet, damit deutlich wird, wie die im oberen Teil ausgewiesenen Zahlen entstanden sind. Es handelt sich also jeweils um die Summe der in jeder Schrägzeile vorkommenden Zahlen. Das sind die sogenannten Fibonacci-Zahlen, die der von Leonardo von Pisa gestellten Kaninchenaufgabe zugrunde liegen. Sein Werk „liber abbaci“ erschien 1202.

Es sei dahingestellt, ob Fibonacci ein guter Beobachter oder Erfinder war. Seine Reisen in die arabische Welt boten ihm wohl Gelegenheit zu seiner Wissenserweiterung. Eduard Lucas soll 1877 diese Folge von Zahlen nach Fibonacci benannt haben. Die so genannten Fibonacci-Zahlen lassen sich auch mit folgender Formel explizit gewinnen:

$$F_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

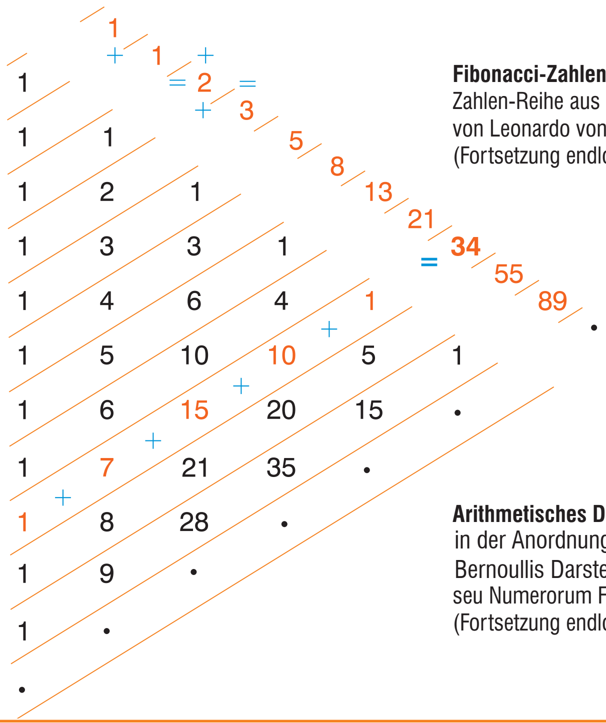
Nicht sehr verbreitet scheint das Wissen zu sein, dass diese Folge auf das arithmetische Dreieck zurückgeführt werden kann.

Verblüffende Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen

Die Folge beginnt mit 1, 1 und ab dem dritten Glied gilt: Jedes Glied ist gleich der Summe der beiden Vorgänger, also in der Form: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … Oben wurde gezeigt, dass die Wurzeln dieser bedeutenden Reihe im arithmetischen Dreieck liegen.

Bemerkenswert an dieser Reihe ist, dass die ersten Differenzen eine Reihe ergeben, die der ursprünglichen gleicht. Die Fibonacci-Zahlen gelten in der Geschichte der Mathematik als die erste rekurrente Reihe.

Abb. 7 **Arithmetisches Dreieck (verkürzt) und Fibonacci-Zahlen**



Fibonacci-Zahlen
Zahlen-Reihe aus dem Jahre 1202
von Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (ca. 1180 - nach 1240).
(Fortsetzung endlos)

Arithmetisches Dreieck
in der Anordnung (hier Auszug) von Jakob Bernoulli (1655 - 1705).
Bernoullis Darstellung lautet: „Tabula Combinationum,
seu Numerorum Figuratorum".
(Fortsetzung endlos)

Diese Folge von Zahlen stellt eine Verbindung von der Mathematik zur Kunst her, weil das Verhältnis aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen gegen den „Goldenen Schnitt" $\Phi = 0{,}5\,(\sqrt{5}+1) \approx 1{,}618$ konvergiert. Dieser spielt seit der Antike bei Bauwerken, Gemälden und Skulpturen eine herausragende Rolle. So entstand Kunst aus Wissen. Die Fibonacci-Folge drückt viele Beziehungen in der Mathematik und Natur aus. So entspricht zum Beispiel die Proliferation zahlreicher Pflanzen einer Folge von Fibonacci-Zahlen. Proliferation bedeutet nach Brockhaus: [lat. Kunstwort „Nachkommenerzeugung"], Sprossung, Wucherung. In der Botanik weiß man, dass in natürlichen Spiralen immer wieder spezielle Zahlen vorkommen, so können zum Beispiel die Samen der Sonnenblume 55 Spiralen in der einen und 89 in der anderen Richtung aufweisen.

Kurz gestreift wird das griechische Theater in Epidauros. Das Auditorium wird mittlerweile auf etwa 300 v. Chr. datiert. Es stellt sich die Frage, ob es nur ein Zufall ist, dass die Anzahl der Sitzreihen über und unter dem *diazoma* (dem Umgang quer durch die Sitzreihen) 34 bzw. 21 beträgt, vgl. Dilke, O.A.W.: Mathematik, Maße und Gewichte in der Antike. Stuttgart 1991.
Die Börsenanalyse mit Fibonacci-Zahlen sucht wahrscheinlich vergebens nach dem roten Faden im Börsengeschehen. Besser orientiert man sich an Karl von Holtei (1798 - 1880), der den Satz prägte: „Die Theorie träumt, die Praxis belehrt." Goethe lässt Mephistopheles beim Auftritt eines Schülers sagen: „Grau, teurer Freund, ist alle Theorie, Und grün des Lebens goldner Baum.", vgl. Faust Erster Teil 2038.

Bernoullis's Potenzsummenproblem (Summæ Potestatum)

Mit einem beachtenswerten Kommentar versah Jakob Bernoulli seine Tafel „Die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen.": „Mit Hilfe der obigen Tafel habe ich innerhalb einer halben Viertelstunde gefunden, dass die 10ten Potenzen der ersten tausend Zahlen die Summe liefern:
91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500."
Die entsprechende Formel lautet:

$$S\left(n^{10}\right) = \frac{1}{11}n^{11} + 0{,}5\,n^{10} + \frac{5}{6}n^{9} - n^{7} + n^{5} - 0{,}5\,n^{3} + \frac{5}{66}n\,.$$

Die Lösung des Potenzsummenproblems durch Jakob Bernoulli beruht auf dem binomischen Satz.
Eine Regel für die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen ist übrigens bereits in Keilschrifttexten enthalten.

Erinnert sei hier an den neunjährigen Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), der seinen Lehrer Büttner beeindruckte, weil er sehr rasch die Summe einer arithmetischen Folge berechnet hatte. Ähnlich wie Gauß ging Gottfried Wilhelm Leibniz

(1646 - 1716) vor, als er die mittlere Dauer des menschlichen Lebens bestimmen wollte und dazu die Summe der Zahlen 1 + 2 + 3 + … + 80 benötigte.

Problem der vertauschten Briefe

Die Zahl e ist ein wesentlicher Bestandteil der Gleichungen zur Berechnung von Zins und Zinseszins. Dieser bemerkenswerten Zahl begegnet man häufig in Wahrscheinlichkeitsaufgaben. Die Nützlichkeit dieser Zahl sei hier am klassischen Problem der vertauschten Briefe demonstriert. Dabei spielt auch der binomische Satz eine beachtliche Rolle.

Diese Aufgabe wurde zuerst von Nikolaus Bernoulli I. (1687 - 1759), ein Neffe der beiden großen Mathematiker Jakob und Johann Bernoulli, behandelt. Später löste Leonhard Euler (1707 - 1783) das Problem unabhängig von Bernoulli. In etwas anschaulicherer Form lautet die Aufgabe: Jemand schreibt n Briefe und auf n Umschläge die zugehörigen Anschriften. Auf wie viele Arten kann er alle Briefe in falsche Umschläge stecken?

Die Lösung dieses Problems soll folgende Übersicht zeigen:

Die Aufgabe über die vertauschten Briefe

Anzahl der			Wahrscheinlichkeit, dass kein Brief richtig einkuvertiert ist (Zahl)
Briefe (n)	Vertauschungen (n!)	Vertauschungen, in denen kein Umschlag den zugehörigen Brief enthält	
	1	2	3
2	2	1	0,500000
3	6	2	0,333333
4	24	9	0,375000
5	120	44	0,366667
6	720	265	0,368056
7	5 040	1 854	0,367857
8	40 320	14 833	0,367882
9	362 880	133 496	0,367879
10	3 628 800	1 334 961	0,367879

Spalte 3 dieser Darstellung beinhaltet die Wahrscheinlichkeit, dass kein Brief richtig einkuvertiert wurde. Man stellt fest, dass durch ein Anwachsen von n die Zahlen in Spalte 3 kaum mehr beeinflusst werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Brief sich in einem falschen Briefumschlag befindet, beläuft sich auf 0,367879. Dieser Grenzwert ist der Reziprokwert der Zahl e, also 1/e oder e^{-1} bzw. $1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+-\cdots$.

Diesen Wert erhält man übrigens auch mit Hilfe des Binomialsatzes, wenn man a = 1 und $b = -\frac{1}{n}$ setzt und n möglichst groß wählt.

Wie die Daten in den Spalten 1 und 2 der oben stehenden Übersicht zustande kommen, soll folgendes Beispiel veranschaulichen.

Bei den in Spalte 1 ausgewiesenen Daten handelt sich um die Anzahl der Permutationen (Vertauschungen) von n Elementen. Eine Permutation ist eine Zusammenstellung von n Elementen, bei der jedes der n Elemente genau einmal vorkommt. Permutationen ohne Wiederholung liegen vor, wenn alle n Elemente verschieden sind. Nachfolgend ein Beispiel für vier Elemente: a, b, c, d; 4! = 24.

a b c d	b a c d	c a b d	d a b c
a b d c	b a d c	c a d b	d a c b
a c b d	b c a d	c b a d	d b a c
a c d b	b c d a	c b d a	d b c a
a d c b	b d a c	c d a b	d c a b
a d b c	b d c a	c d b a	d c b a

Spalte 2 der Übersicht enthält die Anzahl der aus n Elementen gebildeten Permutationen, in denen kein Element auf seinem ursprünglichen Platz steht. Hierzu ein Beispiel für vier Elemente

a, b, c, d mit den Permutationen

b a d c	c a d b	d a b c
b c d a	c d a b	d c a b
b d a c	c d b a	d c b a

Die entsprechende Anzahl der Permutationen errechnet sich für n = 4 folgendermaßen: $4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=9.$

Oder unter Zuhilfenahme der Binomialkoeffizienten wie folgt:
$4! - 4 \cdot 3! + 6 \cdot 2! - 4 \cdot 1! + 1 = 9.$

Verbleibt die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein Brief in den passenden Umschlag kommt. Die Lösung lautet kurz und bündig: $1-\frac{1}{e}$ oder 0,6321…, also fast 2/3.

Formelmäßig: $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-+\ldots$

Wahrscheinlichkeit und Mehrdeutigkeit

Charles Sanders Peirce bemerkte einmal, dass es in keiner anderen mathematischen Theorie so leicht für Experten ist, sich zu irren, als in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Selbst erstklassige „Köpfe“ waren vor Irrtümern nicht gefeit. Vorsicht also bei der Beantwortung von Fragen der Art „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass …?“

Eine bekannte Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die folgende: Wenn zwei Münzen gleichzeitig geworfen werden, dann hat der Zufall drei Möglichkeiten: a) Wappen und Wappen, b) Wappen und Zahl und c) Zahl und Zahl. Stehen die Chancen 1/3 : 1/3 : 1/3? Nein, sondern: 25 : 50 : 25 (s. S. 88).

Ausgewählte Paradoxien der Wahrscheinlichkeit

- Das bekannteste aller Wahrscheinlichkeitsparadoxien ist das „Petersburger Problem“, das Daniel Bernoulli 1730/31 behandelte.
- Gefühlsmäßig hält man die Wahrscheinlichkeit für gering, dass zwei von 24 wahllos ausgesuchten Personen am selben Tag Geburtstag haben. Tatsächlich liegt die Wahrscheinlichkeit bei 54 %.
- Simon Newcomb (1835 - 1909) fiel auf, dass die vorderen Seiten einer Logarithmentafel stärker abgegriffen waren als die hinteren. Frank Benford untersuchte, ob Zahlen häufiger mit der Ziffer 1 beginnen. Er veröffentlichte 1938 sein Gesetz der Zahlen-Anomalie (*The Law of Anomalous Numbers*). Es lautet: $f(i) = \log\left(\frac{i+1}{i}\right)$. Der Wert f steht für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl mit einer bestimmten Ziffer beginnt. Der Kleinbuchstabe i steht für die Ziffern 1 bis 9. Danach beläuft sich die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Ziffer einer Zahl eine Eins ist, auf 30,1 % und nicht auf 1/9 wie man das normalerweise erwarten würde. Entsprechend gilt für die Ziffer 9 die Wahrscheinlichkeit 4,6 %.

post hoc, ergo propter hoc

Nach Brockhaus: [lat. „danach, also deshalb“], Formel für den Fehlschluss, der von der zeitlichen Aufeinanderfolge ohne weiteres auf Verursachung schließt.

Ein beliebtes Beispiel dafür: Täglich beobachtet man den Wechsel von Tag und Nacht. Glaubt jemand, dass die Nacht die Ursache des Tages sei und der Tag die Ursache für die Nacht, so würde er „post hoc, ergo propter hoc“ schließen. Tatsächlich wird der Wechsel von Tag und Nacht durch die Rotation der Erde um ihre eigene Achse verursacht.

Zwischen 9 und 11 – eine unterhaltsame Frage

Nachfolgend sei eine von C. Stanley Ogilvy in seinem Buch *Mathematische Leckerbissen* (Übers. von Dr. Eberhard Bubser, Braunschweig 1969) gestellte Frage wiedergegeben, mit der er darauf aufmerksam machen wollte, welche Präzision des Denkens und des Ausdrucks erforderlich ist, wo es sich um Durchschnittswerte, Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte handelt.

„Welchen Wert darf man am ehesten für x erwarten, wenn man nichts weiter weiß, als dass x zwischen 9 und 11 liegt? Oder, falls diese Formulierung einfach als zu vage empfunden wird: angenommen, man wird gezwungen, den Wert von x zu erraten und muss für jedes Prozent Irrtum eine Geldstrafe zahlen. Bei welcher Schätzung fällt die größte mögliche Strafe am kleinsten aus? Auf den ersten Blick würde man vielleicht auf 10 setzen, weil dabei der Fehler nach beiden Seiten nicht größer als 1 werden kann. Aber 9,9 wäre eine bessere Schätzung, weil der Fehler dann 10 % des wahren Wertes nicht überschreiten kann; während bei der Schätzung 10 der Fehler größer als 11 % wird, wenn der wahre Wert dicht bei 9 liegt.

Man kann das Problem algebraisch lösen, wenn man x so wählt, dass der maximale Fehler nach beiden Seiten gleich wird: $\frac{x - 9}{9} = \frac{11 - x}{11}$.

Beobachten wir nun, was geschieht, wenn wir den zulässigen Bereich erweitern! Angenommen, wir wissen von x nur, dass es zwischen 1 und 100 liegt. Das gleiche Verfahren, das wir eben angewandt haben, führt auf ein x, das dicht bei 2 liegt (genau 1,98). Und das ist die richtige Antwort; der maximale Fehler nach beiden Seiten beträgt jetzt fast 100 %. Dadurch kommen einem Zweifel, ob die angemessenste Interpretation des ‚am ehesten zu erwartenden Wertes’ wirklich in jedem Falle das Minimum des größten möglichen Fehlers ist. Nur wenige Menschen dürften 2 für eine plausible Schätzung einer Zahl zwischen 1 und 100 halten. In Wirklichkeit gibt es natürlich keinen ‚am ehesten zu erwartenden Wert’. Solange wir keine weiteren Daten haben, bleibt eine Zahl so gut wie die andere; alle sind gleichwahrscheinlich.“

Das Spiel mit dem Zufall

Man glaubt, dass jeder weiß, was Zufall ist, aber dennoch fällt es schwer ihn zu definieren. Zufallsereignisse bestimmen unser tägliches Leben. Man unterscheidet sichere, unmögliche und zufällige Ereignisse. Ein sicheres Ereignis liegt vor, wenn unter bestimmten Bedingungen ein Ereignis immer eintritt. Kann ein Ereignis nie auftreten, so ist es ein unmögliches Ereignis. Besteht schließlich die Möglichkeit des Auftretens oder des Nichtauftretens, so wird es als zufälliges Ereignis bezeichnet.

Die vom Siemens-Museum herausgegebene Schrift *Schönheit der Mathematik* [Eine Sonderausstellung des Siemens-Museums 1990] beinhaltet u.a. einen Beitrag (mit Bild) unter dem Titel *Das Spiel mit dem Zufall (Wahrscheinlichkeitsrechnung)*, dem das Folgende entnommen wurde:

„Ein Großteil der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit Fragen, die sich aus dem Zusammenwirken von Gesetz und Zufall ergeben. Ein Beispiel hierfür sind etwa Verteilungen mit Schwerpunkten. Eindrucksvoll sind auch Versuche, aus der Gleichverteilung kleinere Bereiche herauszuvergrößern und die Gesetzmäßigkeiten der sich hieraus ergebenden Strukturen zu untersuchen.“

Wesentlich oder zufällig?

Oft wird bei statistischen Tests die Frage gestellt, ob die aufgetretenen Abweichungen zufälliger oder wesentlicher Natur sind. Häufig lässt sich eine Antwort mit den angebotenen Prüfverfahren finden.

Zwei wichtige Testverfahren sind der sog. Chi-Quadrat-Test (χ^2-Test) für diskrete und auch für stetige Verteilungen und der Kolmogorov-Smirnow-Test für stetige Verteilungen. Sie zählen zu den verteilungsunabhängigen Tests. Die χ^2-Verteilung ist eine sehr vielseitig anwendbare Verteilung der statistischen Theorie. Sie dient hauptsächlich zur Prüfung der Übereinstimmung zwischen beobachteten und theoretischen Verteilungen und zur Prüfung der Übereinstimmung zwischen beobachteten und theoretischen Streuungen.

Die Chi-Quadrat-Verteilung wurde von Friedrich Robert Helmert (1843 - 1917) im Jahr 1876 abgeleitet, geriet aber in Vergessenheit. Karl Pearson (1857 - 1936) entdeckte 1900 die χ^2-Verteilung wieder und entwickelte den χ^2-Anpassungstest. Mit dieser Prüfgröße lässt sich zum Beispiel an Hand einer Serie von Würfen testen, ob ein Würfel manipuliert wurde. Weitere Beispiele sind: Ist die Verteilung der Nachkommastellen der Zahl Pi (π) wesentlich oder zufällig? Schwanken die Geburtenzahlen in den 12 Monaten eines Jahres nur zufallsbedingt oder signifikant? Man teste die Hypothese, dass eine Stichprobe einer normalverteilten Grundgesamtheit entstammt. Zuletzt sei die Mendel’sche Theorie als Beispiel für diesen Test genannt.

Tabelle der Binomialkoeffizienten (Berechnung des Verfassers)

n	n!
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000
20	2432902008176640000
21	51090942171709440000
22	1124000727777607680000
23	25852016738884976640000
24	620448401733239439360000
25	15511210043330985984000000
26	403291461126605635584000000
27	10888869450418352160768000000
28	304888344611713860501504000000
29	8841761993739701954543616000000
30	265252859812191058636308480000000
31	8222838654177922817725562880000000
32	263130836933693530167218012160000000
33	8683317618811886495518194401280000000
34	295232799039604140847618609643520000000
35	10333147966386144929666651337523200000000
36	371993326789901217467999448150835200000000
37	13763753091226345046315979581580902000000000
38	523022617466601111760007224100074050000000000
39	20397882081197443358640281739902886000000000000
40	815915283247897734345611269596115290000000000000
41	33452526613163807108170062053440692000000000000000
42	1405006117752879898543142606244508600000000000000000
43	60415263063373835637355132068513858000000000000000000
44	2658271574788448768043625811014608500000000000000000000
45	119622220865480194561963161495657350000000000000000000000

Anm.: n sei eine natürliche Zahl, also eine der Zahlen 1, 2, 3, …, dann ist n-Fakultät, geschrieben n!, das Produkt 1 * 2 * 3 * … * n, zum Beispiel 3! = 1 * 2 * 3 = 6.

Literaturnachweis

Bernoulli, Jakob: Wahrscheinlichkeitsrechnung: I., II., III. und IV. Theil = Ars conjectandi / von Jakob Bernoulli. Uebers. und hrsg. von R. Haussner. – Nachdr. der Ausg. 1713. – Thun; Frankfurt am Main 1999.

Biermann, Kurt-R. und Faak, Margot: G.W. Leibniz und die Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit bei J. de Witt. In: Forschungen und Fortschritte. Nachrichtenblatt der deutschen Wissenschaft und Technik. Berlin Juni 1959.

Leibniz, Gottfried Wilhelm: Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik. Hrsg. von Eberhard Knobloch und J.-Matthias Graf von der Schulenburg. Mit Kommentaren von Eberhard Knobloch, Ivo Schneider, Edgar Neuburger, Walter Karten und Klaus Luig. Berlin 2000.

Mandelbrot, Benoît B.: Die fraktale Geometrie der Natur / Benoît B. Mandelbrot. [Übers. aus dem Engl.: Reinhilt Zähle; Ulrich Zähle. Hrsg. d. dt. Ausg.: Ulrich Zähle]. - Basel; Boston 1987.

Menges, Günter: Grundriß der Statistik. 1. Theorie. Köln 1968.

Historischer Abriss ausgewählter Rechentechniken

Voraussetzung für eine angemessene Bewertung von Leibrenten war eine fortgeschrittene Mathematik. In der Lebensversicherung, die sich aus dem mittelalterlichen Leibrentengeschäft entwickelte, hat die Mathematik schon immer eine wichtige Rolle gespielt. So bemerkte Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) im Rahmen seiner Zinseszinsrechnungen: „Für höhere Potenzen werden wir Logarithmen zur Anwendung bringen, …“ (Leibniz 2000, S. 201). Die historische Entwicklung bestimmter Rechentechniken soll dieser Beitrag in gedrängter Form aufzeigen. Eigens behandelt wird der historische Verlauf der Rechenmaschinen (s. Seite 121). Abgeschlossen wird dieser Beitrag mit einem kurzen Streifzug in die Ausgleichsrechnung, wobei den Spline-Funktionen eine besondere Beachtung zukommt.

Streifzug in die Geschichte des Zahlenrechnens

Im Abendland machte die Technik des Zahlenrechnens einen Fortschritt mit der Anwendung des heutzutage benutzten dezimalen Positions- oder Stellenwertsystems. Es geht auf die Inder zurück und kam über die Araber nach Europa (über Spanien und Italien).

Die negativen Zahlen fassten in Europa deshalb spät Fuß, weil die Araber – die Brücke zwischen Indien und Europa – sie ablehnten. Eine Anerkennung fanden die negativen Zahlen im 16. Jahrhundert durch Michael Stifel und Simon Stevin. Aber erst 1867 wurden die ganzen Zahlen endgültig in die Mathematik durch Hermann Hankel (1839 - 1873) eingebunden. Dem Dionysius Exiguus kann man nicht vorwerfen, dass er im 6. Jahrhundert bei seiner Zeitrechnung die Null nicht berücksichtigt hatte, weil sie damals in Europa noch unbekannt war. Heute sind jedermann die rechtwinkligen oder kartesischen Koordinaten vertraut. Nur weil die beiden Achsen mit Null beginnen, wurde diese Entdeckung ein Erfolg. Der Verfasser des ersten gedruckten Werkes über Dezimalbrüche in Europa (1585) ist Simon Stevin.

Während im 16. Jahrhundert das Erlernen der Bruchrechnung nur an den Hohen Schulen in Italien möglich war, findet man bei dem deutschen Theologen und Mathematiker Michael Stifel (1487 - 1567) schon das numerische Radizieren bis zur 7. Wurzel; heute benutzt man dazu Logarithmen.

Sternwarten waren neben den Klöstern und Domschulen Stätten des Wissens. Die rechnerische Bearbeitung der Proportionen und der Kalkül des Dreisatzes erfolgten in Europa vom 15. bis zum 16. Jahrhundert, vor allem im Zusammenhang mit dem kaufmännischen Rechnen. Sie waren hauptsächlich Lehrgegenstand der Rechenmeister und Cossisten. In Deutschland ist vor allem Adam Ries(e) (1492 - 1559) bekannt geworden. Die neuzeitliche Mathematik (etwa ab 1500) wurde bei ihrer Entfaltung wesentlich von außen her angeregt.

Durch gestiegene Ansprüche an die Rechenverfahren fand die Prosthaphaerese Eingang in die Praxis. Dieses System wurde durch das Rechnen mit Logarithmen verdrängt.

Die Schaffung der Logarithmen, die aus praktischen Gründen entstanden, war eine herausragende Erfindung des christlichen Abendlands. Die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen, beeinflusste nicht nur die Zinseszins-, Renten- und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diese Zahl findet sich auch im Gompertz'schen Gesetz, das dem Verlauf der Sterblichkeit im hohen Alter näherungsweise entspricht. Der Nutzen dieser besonderen Zahl zeigte sich zum Beispiel bei der Lösung des berühmten Problems der hängenden Kette oder beim Problem der vertauschten Briefe. Hilfreich könnte sie beim immer wieder diskutierten Thema Steuertarif sein. Diese merkwürdige Zahl ist in der gesamten Mathematik sehr wichtig. Während die Geschichte der Zahl π (Pi) weit in die Vergangenheit zurückreicht, ist die Zahl e noch relativ „jung“.

Eine besondere Entdeckung war die Relation $e^{i\pi} = -1$ (heutige Schreibweise), die fünf Basisgrößen der Mathematik (e, i, π, 0 und 1) miteinander verbindet. Diese Formel geht auf Leonhard Euler (1707 - 1783) zurück, der sie allerdings in einer anderen Form darstellte. Zuerst wurde diese Formel 1714 in logarithmierter Form von Roger Cotes (1682 - 1716) veröffentlicht. Es ist erwähnenswert, dass bei der unendlichen Menge der reellen Zahlen nur ganz wenige Einheiten auf dem Zahlenstrahl genügen, um die wichtigsten Zahlen der Mathematik darzustellen (0, 1, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ [die Länge der Diagonalen in einem Quadrat der Seitenlänge 1[1]]), der „Goldene Schnitt“ $\approx 1{,}618$, die Zahl e $\approx 2{,}718$ und Pi (π) $\approx 3{,}14$.

„Die ersten bekannten Rechenmethodiker, die Zahlenbilder im Rechenunterricht verwendeten, waren Basedow[2] und Busse.“ (Willi Schön in seiner Schrift *Das Schaubild*: *Eine Systematik der Darstellungsmöglichkeiten*). Auf die genannten folgten dann im Laufe des 19. und 20. Jahrhunderts ungezählte „Erfinder“ von „neuen“ Zahlbildern, wie Schön weiter ausführte.

Mathema – das Gelernte: Lehre, Wissenschaft.

Dass sich der Mensch schon immer Gedanken über seine Umwelt machte, zeigt sich deutlich auf dem Gebiet der Astronomie. „Feststeht, dass in Babylonien von 750 bis 50 vor Chr. – vielleicht sogar bis ins erste Jahrhundert nach Chr. – systematisch Astronomie getrieben und dabei eine Fülle von Beobachtungsdaten aufgezeichnet wurde.“, vgl. F. Richard Stephenson: Historische Finsternisse – eine astronomische Fundgrube. In: „Spektrum der Wissenschaft“ 12/1982.

Zu einem neuen Weltbild sei festgehalten: Nikolaus Kopernikus (1473 - 1543) hatte gelehrt, dass die Planeten um die Sonne wandern. Johannes Kepler (1571 - 1630) zeigte, wie sie dies tun. Isaac Newton (1643 - 1727) gab dem Werk den letzten Schliff, indem er erklärte, warum alles so und nicht anders sein könne, durch sein Gravitationsgesetz. Giordano Bruno (1548 - 1600) verkündete 1584 die räumliche Unbegrenztheit des Weltalls.

Mit dem Lauf der Gestirne beschäftigte sich schon im 4. Jahrhundert vor Christus Herakleides Pontikos, Schüler Platons. Ihm war die tägliche Achsendrehung der Erde bekannt und er soll schon das heliozentrische System gelehrt haben. Aristarchos von Samos, der im dritten Jahrhundert vor Christus lebte, verfocht das heliozentrische Weltbild. In der Schrift *naturales questiones* (VII 2,3) von Seneca (gest. 65) ist zu lesen: „Es wird auch gut sein, das zu erforschen, um zu wissen, ob sich der Himmel um die feststehende Erde dreht oder die Erde sich dreht und der Himmel feststeht.“

Die Geschichte mit dem fallendem Apfel brachte Carl F. Gauß durch seinen erheiternden Kommentar auf den Punkt: „Die Geschichte mit dem Apfel ist zu einfältig, ob der Apfel fiel oder es bleiben ließ, wie kann man glauben, dass dadurch eine solche Entdeckung verzögert oder beschleunigt wäre, aber die Begebenheit ist gewiss folgende. Es kam ein Mal zu dem Newton irgendein dummer, zudringlicher Mensch, der ihn befragte, wie er zu seinen großen Entdeckungen gekommen sei. Da aber Newton sich überzeugte, was für ein Geisteskind er vor sich habe, und er den Menschen los sein wollte, habe er geantwortet, es sei ihm ein Apfel auf die Nase gefallen, was auch jenem, der befriedigt von dannen ging, vollkommen einleuchtete.“ (zitiert nach W. Sartorius von Waltershausen).[3]

„Mathematik und Logik sind wohl die einzigen wirklichen ‚Geisteswissenschaften’, und ohne sie wären die exakten Naturwissenschaften kaum denkbar.“ So drückte es der Nobelpreisträger für Physik 1989, Wolfgang Paul, in einem Interview aus; vgl. SZ vom 17./18. März 1990.

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) hielt die Mathematik, um seine eigenen Worte zu gebrauchen, für die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik für die Königin der Mathematik. Diese lasse sich dann öfter herab, der Astronomie und anderen Naturwissenschaften einen Dienst zu erweisen, doch gebühre ihr unter allen Verhältnissen der erste Rang. W. Sartorius von Waltershausen übermittelte uns diese Aussage von Gauß, dem „Meister der drei großen A“: Arithmetik, Algebra und Analysis.

Das griechische Wort mathema (τὸ μάθημα) bedeutet „das Gelernte: Lehre; Wissenschaft“.

Der bedeutende englische Philosoph Bertrand Russel (1872 - 1970) hat in einem Rundfunkvortrag einmal die Frage aufgeworfen, was der wesentliche Beitrag Europas zur geistigen Entwicklung der Menschheit sei. Russel beantwortete die selbst gestellte Frage wie folgt: „Religion gibt es überall,

1 Oder die Länge der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten jeweils die Länge 1 aufweisen.
2 Vermutlich der Erzieher Johannes Bernhard Basedow (1723 - 1790), der zusammen mit anderen den Philanthropismus vertrat.
3 Gauß nannte den englischen Forscher „Summus Newton“. Diesen Beinamen gab Gauß auch Leonhard Euler.

nicht nur in Europa, Kunst und Kultur gibt es überall, nicht nur in Europa. Es ist die Idee der Wissenschaft, die Europa der Welt gebracht hat. Platon und Aristoteles sind es gewesen, die die Idee der Wissenschaft als Wissenschaft entwickelt haben, und es ist ohne Zweifel Sokrates gewesen, der mit seinen bis dahin unerhörten Fragen nach dem ‚was ist dies?' und mit seinem bis dahin unerhörten Forschen nach der logischen Begründung jeder Aussage diesen Weg eröffnet hat." (siehe den Beitrag *Die Idee der Wissenschaft: Das Erbe der Griechen in Europa und der Türkei* von Prof. Dr. Hartmut Wedekind in der F.A.Z. vom 19.4.2003).

Cicero äußert sich in seiner Schrift *Tusculanae disputationes* (Gespräche in Tusculum) so: „Griechenland übertraf uns an Gelehrsamkeit und jeder Art von Literatur;" (I 1,3).

An anderer Stelle beurteilt Cicero die Griechen wie folgt: „In höchstem Ansehen stand bei ihnen [Griechen] die Geometrie; deshalb gab es nichts Erlauchteres als Mathematiker; wir hingegen haben das Maß dieser Kunst auf den Nutzen, den wir beim Messen und Rechnen von ihr haben, beschränkt.", vgl. *Tusc. disp*. I 2,5.

Cicero entdeckte bei seinem Aufenthalt in Sizilien im Jahr 75 v. Chr. das in Vergessenheit geratene Grab des Archimedes (287 - 212 v. Chr.), dem bedeutendsten Mathematiker des Altertums. Hierzu schreibt Cicero u.a.: „Als Quästor habe ich sein Grab, das die Syrakusaner nicht kannten und das, wie sie behaupteten, überhaupt nicht mehr existiere, aufgespürt;" „So hätte die edelste und einst auch die gelehrteste Stadt Griechenlands das Grabmahl ihres einzig scharfsinnigen Mitbürgers nicht gekannt, wenn sie es nicht von einem Mann aus Arpinum [Ciceros Geburtsort] erfahren hätte."; vgl. *Tusc. disp.* V 64 und 66.

In seinem Dialog *De oratore* (Über den Redner, I 10) schreibt Cicero: „Wer wüsste nicht, wie dunkel das Gebiet der Mathematiker ist, wie entlegen, kompliziert und heikel die Wissenschaft, mit der sie sich beschäftigen?"

Nicht fehlen soll hier eine Äußerung von Carl Friedrich Gauß, die wir W. Sartorius von Waltershausen verdanken: „Gauß hat sich öfter gegen uns geäußert, dass Archimedes der Mann des Altertums gewesen sei, den er am höchsten schätze, er denke sich ihn als einen durchaus edel aussehenden würdigen Greis, nur könne er ihm nicht verzeihen, dass er bei seiner Sandrechnung das decadische Zahlensystem nicht gefunden habe. ‚Wie konnte er das übersehen,' sagte er bewegt, ‚und auf welcher Höhe würde sich jetzt die Wissenschaft befinden, wenn Archimedes jene Entdeckung gemacht hätte.' "

Der Mathematikhistoriker Florian Cajori (1859 - 1930) hielt drei Erfindungen ausschlaggebend für die wunderbaren Kräfte des modernen Rechnens: die arabische [indisch-arabische] Schreibweise, die Dezimalbrüche und die Logarithmen.

Dixit algorizmi

Der Mathematiker Mohammed Ibn Musa al-Chwarizmi (gest. etwa im Jahr 840) trug wesentlich zur Verbreitung der neuen indischen Ziffern und der neuen Rechenmethoden bei. Am bekanntesten ist sein „kitab al-dschabr wal-muqabala"=liber algebr et almucabalah, vgl. Vogel, Kurt: Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus: Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern / Nach der einzigen (lateinischen) Handschrift (Cambridge Un. Lib. Ms. I i. 6. 5.) in Faksimile mit Transkription und Kommentar herausgegeben von Kurt Vogel. Aalen 1963. Der Text der Cambridger Abschrift beginnt mit „Dixit algorizmi".
Al-Chwarizmi lebte am Hof des Abbasidenkalifen al-Mamun (813 - 833). Dieser gründete 830 in Bagdad das „Haus der Weisheit", um wissenschaftliche Werke aus dem Griechischen ins Arabische übersetzen zu lassen. Al-Mamun war der Sohn von Harun al-Raschid, der prächtige Bauten schuf und Wissenschaft und Kunst förderte; er wird übrigens in „Tausendundeine Nacht" genannt.

Im 9. Jahrhundert entstand eine arabische Ausgabe des Euklid. Im Jahr 1482 erschienen die *Elemente* Euklids zum ersten Mal in der venetianischen Filiale des Augsburger Druckers Erhard Ratdolt. Sie sind nach der Bibel das Buch mit den meisten Auflagen.

Ein Mathematiker auf dem Stuhl Petri

Leibniz bemerkt in seiner *Explication de L'Aritmètique Binaire* (Erklärung der binären Arithmetik) aus dem Jahr 1703, S. 89: „Europa verdankt die Einführung dieser Arithmetik wahrscheinlich Gerbert, der unter dem Namen Sylvester II. Papst wurde und der sie von den Mauren Spaniens übernahm." (In das Deutsche übertragen von Dr. Rudolf Soellner, München); vgl. *Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins* / Siemens AG. Berlin, München 1966.

Gerbert von Aurillac war ein brillanter Gelehrter und Neuerer, der arabische Wissenschaften kennengelernt hatte. Seine Kenntnisse auf dem Gebiet der Naturwissenschaft und Mathematik brachten ihm den Ruf des Zauberers ein. Der von Otto III. 999 zum Papst ernannte Gerbert verstarb 1003. Die europäischen Rechner benutzten den Abakus des Gerbert und seiner Schüler – ein Abakus eines neuen Typs (neun indisch-arabische Ziffern ohne die dazugehörige Null), vgl. Georges Ifrah.

Der Stauferkaiser Friedrich II.

Friedrich II. (1194 - 1250) schuf in seinem sizilianischen Erbreich den ersten modernen Beamtenstaat. In Palermo hielt der Stauferkaiser seinen glänzenden Hof. Der Kaiser, ein Förderer der Wirtschaft und Kultur, gründete 1224 in Neapel eine Universität. Der hoch gebildete Kaiser beschäftigte sich auch mit antiker und arabischer Philosophie und Naturlehre. Der Hof zu Palermo galt damals als Zentrum des Geisteslebens. Friedrich II. suchte den Ausgleich und den geistigen Austausch mit der arabisch-islamischen Welt. Mit seinem Tod (1250) brach die Staufermacht zusammen.

Am Rande sei erwähnt, dass dessen Großvater Friedrich I. (Barbarossa) 1180 Pfalzgraf Otto von Wittelsbach das Herzogsschwert überreichte. Damit nahm die mehr als 700-jährige Herrschaft der Wittelsbacher über Bayern (bis 1918) ihren Anfang. Unter Herzog Ludwig I. (reg. 1183 - 1231) wurde das bayerische Territorium im Norden und Osten weiter ausgebaut. Als dessen Sohn Otto II. im Jahr 1253 starb, war Bayern das größte Territorialherzogtum im Deutschen Reich.

Bible moralisée: Der Weltenschöpfer

An dieser Stelle soll die Rede von einer der prächtigsten gotischen Handschriften sein, nämlich der *Bible moralisée*, die im 13. Jahrhundert angefertigt wurde. In *Glanzlichter der Buchkunst* (Band 2) heißt es hierzu:

“Von den vielen Miniaturen der Bible moralisée Cod. 2554 der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien (ÖNB) ist eine einzige wirklich berühmt geworden: die einleitende, ganzseitige Darstellung des Weltenschöpfers (1 = fol. Iv).“, siehe Abbildung 1. „In einem Bild ist hier die Erschaffung von Himmel, Erde, Sonne, Mond und allen Elementen – so die Beschriftung – zusammengefasst, und die Darstellung des ausschreitenden Schöpfergottes, der den Kosmos gleichsam vor sich herrollt, sich über ihn beugt und ihn mit dem Zirkel messend formt, hat nicht nur wegen ihrer Eindruckskraft die Aufmerksamkeit auf sich gezogen, sondern auch, weil sie wie kaum ein anderes Bild die Bedeutung des Messens und der Proportion im hohen Mittelalter zu veranschaulichen hilft. Entstanden ungefähr gleichzeitig wie die großen hochgotischen Kathedralen der Ile-de-France und im gleichen nordfranzösischen Bereich, schien die Miniatur jene Anschauungen zu erhellen, von denen die gotische Kathedrale geprägt wurde. 'Gott als Architekt des Universums‘, so lautete die Bildunterschrift, als die Miniatur in einem Werk über die gotische Kathedrale abgebildet wurde.“

Abb. 1 Bible moralisée: Der Weltenschöpfer. Aus: Benoît B. Mandelbrot: Die fraktale Geometrie der Natur. Basel 1987.

Das besprochene Motiv aus *Bible moralisée* nahm Mandelbrot in sein Buch *Die fraktale Geometrie der Natur* auf. Für ihn liefert sie ein Beispiel dafür, dass schon in alten Kunstwerken die fraktale Geometrie eine Rolle spielte. Mandelbrot nennt noch zwei weitere Beispiele: *Die Sintflut* von Leonardo da Vinci (1452 - 1519) und *Die Woge* von Katsushika Hokusai (1760 - 1849). Die sog. Fraktale fanden erst im 20. Jahrhundert Eingang in die Forschung. Den Begriff „Fraktal“ prägte Benoît Mandelbrot (geb. 1924) nach dem lateinischen Verb „frangere“ (brechen) und begründete in den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts die fraktale Geometrie als mathematisches Forschungsgebiet (Theorie komplexer geometrischer Formen, die mit den euklidischen Methoden nicht zu analysieren und zu klassifizieren sind). Ein bekanntes Beispiel für ein Fraktal ist die Mandelbrot-Menge („Apfelmännchen“). Auf Fraktale trifft man überall in der Natur.

Erste abendländische Algorithmiker zu Beginn des 13. Jahrhunderts: Fibanoacci und Sacrobosco

Der älteste abendländische Algorithmiker ist Leonardo von Pisa (geb. etwa 1180, gest. nach 1240), genannt Fibonacci. Um das Jahr 1202 erschien seine bedeutende Einführung in die neue Zahlenrechnung mit zahlentheoretischen Beiträgen unter dem Titel *Liber abbaci* [Zu verstehen als „Buch der Rechenkunst“]. Eine größere Verbreitung erlangte sein zweites Buch, das 1228 veröffentlicht wurde. Er disputierte am Hofe Kaiser Friedrichs II. über mathematische Themen. Ein finanzielles Problem hielt er für lösbar, wenn der Begriff Schulden akzeptiert wird. Dennoch dauerte es noch Jahrhunderte bis sich negative Zahlen durchgesetzt haben.

Das erste Kapitel dieser Schrift beginnt mit: „Novem figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice cephirum appelatur, scribitur quilibet numerus...“ (Die neun Figuren der Inder sind diese: 9,8,7,6,5,4,3,2,1. Mit diesen neun Figuren und mit diesem Zeichen 0, was arabisch cephirum heißt, wird jede beliebige Zahl geschrieben). Erinnert sei an das Wort figure im Englischen, das auch Ziffer bedeutet.

Das erste weit verbreitete Universitätslehrbuch über die Darstellung der Zahlen in indischen Ziffern und das Rechnen mit ihnen war *Algorismus vulgaris* von Johannes de Sacrobosco, der um 1236 in Paris verstarb; vgl. Gericke, Helmuth: Mathematik im Abendland. In seinem Werk *Tractatus de sphaera* diskutierte Sacrobosco über die Gestalt der Welt. So sagt Sacrobosco (zitiert nach Helmuth Gericke): „Dass der Himmel rund ist, hat einen dreifachen Grund: Ähnlichkeit (similitudo), Zweckmäßigkeit (commoditas) und Notwendigkeit (necessitas).“

Allmähliche Verbreitung der neuen Ziffern

Die neun Figuren der Inder (die Ziffern von 1 bis 9) und cephirum (die Null) haben sich in Europa nur langsam verbreitet. Auf die neun Ziffern indischen Ursprungs trifft man in Europa in einer spanischen Handschrift aus dem Jahr 976, dem Codex Vigilanus. Bemerkenswert ist das Verbot der neuen Ziffern im Jahr 1299 durch die Florentiner Wechslerzunft, die an den römischen Zahlzeichen festhielt. Mancher behauptete, weil sie der neuen Rechentechnik nicht mächtig war.

Das Hauptbuch der Firma Averado de Medici e Compagni vom Jahr 1395 wurde in zwei Währungen geführt: die Pisaer fiorini (fl.) sind in römischen Ziffern geschrieben, während die Florentiner Währung in arabischen Ziffern [indisch-arabisch] ausgewiesen wird.

Das Ringen der Rechensysteme (auf den Linien und mit der Feder) illustriert eindrucksvoll eine allegorische Darstellung der Arithmetik aus dem Jahr 1503 in dem Werk *Margarita philosophica* des Freiburger Kartäusers Gregor Reisch (1470 - 1525): Der Abakusrechner sitzt griesgrämig beim Rechnen, während der Algorithmiker bereits fertig ist (s. S. 136).

Ein Verfahren der Fingerrechnung beschrieb im 7. Jahrhundert Beda (um 673 bis 735), genannt Beda Venerabilis. Der Titel seiner Schrift *Abacus atque vetustissima veterum Latinorum per digitos manusque* … (Das Rechenbrett und der älteste Gebrauch der Lateiner mit Fingern und Händen zu rechnen) macht dieses Verfahren deutlich. Dieses Werk gab der bayerische Geschichtsschreiber Johannes Aventinus 1532 heraus.

Beda stellte in seiner Schrift *De ratione temporum* (Über die Berechnung der Zeit) ein Verfahren der Fingerrechnung zur Bestimmung des Osterfestes nach dem Julianischen Kalender vor. Hierbei spielten u.a. der 28-jährige Sonnenzyklus und der 19-jährige Mondzyklus eine wesentliche Rolle.

Schließlich sei das Lateinische „Tui digiti“ (deine Rechenfertigkeit) und „Supputat articulis“ (zählt an den Fingern) erwähnt.

Einen Einblick in die tägliche Praxis des Rechnens im alten Rom vermitteln zum Beispiel das Testament des römischen Kaisers Augustus sowie die Verhältnis-Angaben der damals bekannten drei Weltteile. Die von Horaz stammende Szene aus dem Schulunterricht wurde an anderer Stelle bereits geschildert (s. S. 62).

Vom Testament des Augustus berichtete Sueton. „Als ersten Erben bestimmte er Tiberius mit der Hälfte und einem Sechstel, Livia mit einem Drittel, die auch beide seinen Namen tragen sollten. Als Erben zweiten Grades setzte er Drusus ein, den Sohn des Tiberius, mit einem Drittel des noch verbleibenden letzten Zwölftels, und Germanicus und seine Söhne mit den restlichen Teilen. (…)“, vgl. Sueton, *Augustus* 101,2. Formelmäßig: 1. Grad: $1/2 + 1/12 + 1/3 = 11/12$ und 2. Grad: $1/36 + 2/36 = 1/12$.

Bemerkenswert ist der Bericht von Plinius d. Ä. zu den damals bekannten drei Erdteilen. „dass Europa um etwas weniger als

die Hälfte Asiens größer als Asien ist, um das Doppelte aber und den sechsten Teil von Afrika größer als Afrika. Zählt man alle diese Werte zusammen, so wird völlig offenbar werden, dass Europa den dritten und etwas mehr als den achten Teil der ganzen Erde ausmacht, Asien aber den vierten und vierzehnten, Afrika jedoch den fünften und den sechzigsten." *(Nat. hist.* I. VI, 210).
In Zahlen ausgedrückt (heutige Schreibweise):
(1/3 + 1/8) + (1/4 + 1/14) + (1/5 + 1/60) = 1 oder in Prozent: 46 + 32 + 22.

Es ist erwähnenswert, dass im ehemaligen Benediktinerkloster Reichenbach am Regen bereits im 14. Jahrhundert die damals noch ungewohnten indisch-arabischen Ziffern angewandt wurden; vgl. Wolfgang Kaunzner, S. 26.

Über das Rechnen mit dem Abakus

Simon Jakob (gest. 1564) schrieb über das Rechnen mit dem Abakus (zit. n. Dédron / Itard 1959, 286):
„Es trifft zu, dass er bei Rechnungen im Haushalt von einigem Vorteil erscheint, wo man oft summieren, abziehen und hinzufügen muss, aber in der hohen Kunst des Rechnens ist er sehr oft hinderlich. Ich behaupte nicht, dass man auf den Linien [des Abakus] diese Rechnungen nicht anstellen kann, aber den Vorteil, den ein freier Wanderer ohne Lasten gegenüber einem schwer bepackten hat, den hat auch die Rechnung mit Zahlen gegenüber der Rechnung mit Linien."; vgl. Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/Main; New York 1991, S. 148.

Alfons X. veranlasste neue astronomische Tafeln

Ferdinand III. (1199 - 1252) erneuerte die von seinem Vater Alfons IX. 1218 gegründete Universität Salamanca, die vom 13. bis 16. Jahrhundert zu den vier bedeutendsten Universitäten des Abendlandes zählte. Sein Sohn Alfons X. (1226 - 1284), der gelehrteste Fürst des Mittelalters, förderte Dichtung, Gesetzessammlung, Himmelskunde und Geschichtsschreibung. Alfons X. wurde auch der Weise genannt und war König von Kastilien und León (1252 - 1282). Als Enkel Philipps von Schwaben, dem jüngsten Sohn von Kaiser Friedrich I. wurde er 1257 zum deutschen König gewählt, kam aber nie nach Deutschland.

Als Alfons X. 1252 seinem Vater (Ferdinand III.) auf den Thron folgte, wurden ihm die auf sein Betreiben hin erstellten astronomischen Tafeln mit Angaben über die sichtbaren Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten übergeben. Diese nach ihm benannten „Alfonsinischen Tafeln" übertrafen die Ptolemäischen aus dem 2. Jahrhundert deutlich und waren bis Kopernikus (1473 - 1543) in Gebrauch. Ihnen folgten 1551 die Prutenischen Tafeln, die 1627 durch die „Rudolphinischen Tafeln" verdrängt wurden.

Der Astronom und Mathematiker Rudolf Wolf (1816 - 1893) berichtete Details über die von Alfons einberufene Kommission. Diese versammelte sich zu Toledo, das kurz zuvor die Herrschaft der Araber abgeworfen hatte. Unter dem Präsidium des Juden Isaac Aben Said, genannt Hassan, gehörten der Kommission fünfzig arabische, jüdische und christliche Gelehrte an. Für dieses Projekt soll Alfons X. die stattliche Anzahl von 400 000 Goldstücken zur Verfügung gestellt haben.

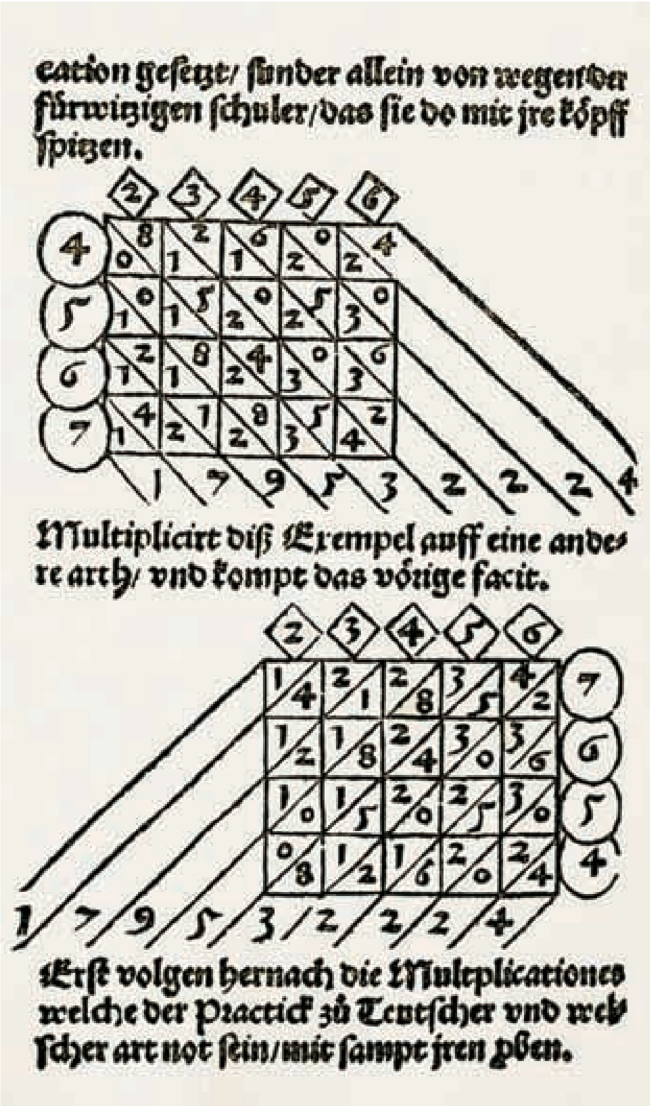
Bei der Gregorianischen Kalenderreform berief man sich auf die „Alfonsinischen Berechnungen". Aloisius Lilius nannte in seinem Werk *Compendium Novae rationis restituendi kalendarium* (Kompendium einer neuen Methode zur Reform des Kalenders) aus dem Jahr 1576 die Alfonsinischen Berechnungen (s. S. 138). Dort nahm man auch Bezug auf „Copernicus", dessen Lehren blieben bis zum Erlass der Indexkongregation vom Jahr 1616 kirchlicherseits unbeanstandet.

Paolo Dagomari (Paolo d'Abbaco)

Als ein ausgezeichneter Rechner galt im 14. Jahrhundert Paolo Dagomari, man nannte ihn deshalb „Paolo dell'Abbaco" (gest. 1374). Nach Rudolf Wolf schuf er den ersten italienischen Kalender. Von seinen mathematischen Werken seien genannt: *Trattato d'aritmetica und Una raccolta di tre libri d'Abbaco.* In der letztgenannten Schrift wird ein Multiplikationsverfahren aufgezeigt, das indisch-arabischer Herkunft ist. Bei Georges Ifrah findet sich hierfür die Bezeichnung „per gelosia". Andere nennen dieses Verfahren „Die Blitzartige". Dieses Multiplikationsverfahren stellte Peter Apian in seiner Schrift *Kauffmanß Rechnung* aus dem Jahr 1527 vor (siehe Abbildung 2).

Heinrich der Seefahrer

Prinz Heinrich der Seefahrer (1394 - 1460) errichtete in Sagres eine Sternwarte und die erste Seefahrtschule der Welt. Durch die von ihm veranlassten Entdeckungsfahrten an die westafrikanische Küste legte er den Grund zur Weltstellung Portugals im 16. Jahrhundert. Mit dem 1494 geschlossenen Vertrag von Tordesillas wurden die von Spanien und Portugal neu entdeckten Gebiete abgegrenzt (Schiedsspruch von Papst Alexander VI.).


cation gesetzt/ sunder allein von wegen der fürwitzigen schuler/das sie do mit jre köpff spitzen.

Multiplicirt diß Exempel auff eine andere arth/ vnd kompt das vörige facit.

Erst volgen hernach die Mulplicationes welche der Practick zů Teutscher vnd welscher art not sein/mit sampt jren proben.

Abb. 2 Aus: Apian, Peter: Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung … . Nachdruck [der Ausgabe Ingolstadt 1527]. Buxheim 1995.

Nikolaus von Kues (Cusanus)

Auf der Schwelle zwischen dem Mittelalter und der Renaissance steht Nikolaus von Kues (Cusanus, 1401 - 1464). In den Jahren 1445 - 1459 schrieb Cusanus[4] mehrere mathematische Abhandlungen, deren Gegenstand hauptsächlich die Rektifikation und Quadratur des Kreises war. Über das Problem der Quadratur des Kreises diskutierte er mit führenden Mathematikern seiner Zeit, darunter Paolo del Pozzo Toscanelli (1397 - 1482). Der Florentiner Mathematiker und Astronom Toscanelli beriet Brunelleschi beim Bau der Domkuppel von Florenz (1418 - 1436). Filippo Brunelleschi (1377 - 1446) begründete mit dem von ihm geschaffenen Frührenaissance-Stil die neuere Baukunst in Florenz (u.a. Findelhaus, Domkuppel). Er gilt als der Entdecker der Zentralperspektive für die Malerei.

Cusanus, der 1448 zum Kardinal ernannt wurde, erhielt von Papst Nikolaus V. (reg. 1447 - 1455) um 1453 eine Übersetzung der Werke des Archimedes, die Jakob von Cremona auf Veranlassung des Papstes angefertigt hatte, vgl. Helmuth Gericke: Mathematik im Abendland. Berlin … 1990, S. 204. Nikolaus V. war der erste Renaissance-Papst, Förderer des Humanismus und Restaurator vieler Kirchen Roms.

Cusanus, der schon Vorschläge zur Kalenderverbesserung unterbreitete, interessierte sich auch für den Wissensreformer Raimundus Lullus (1235 - 1316). Dieser ließ sich von den von den Arabern eingeführten algebraischen Methoden zu seiner „Ars magna“ inspirieren. Ein Verfahren, durch schematische Anordnung der Begriffe übersichtliche Erkenntnis und sichere Beweisführung zu lehren (nach Brockhaus). Die „Lullus’sche Kunst“ hat auf die folgenden Generationen von Mathematikern großen Einfluss ausgeübt.

Die Null und eine negative Zahl als Lösung einer Rechenaufgabe

In der *Einführung in die mathematische Philosophie* von Bertrand Russell (1872 - 1970) heißt es: „Was die 0 betrifft, so ist sie erst in neuester Zeit hinzugekommen. Die Griechen und Römer kannten eine solche Ziffer nicht.“

Nicolas Chuquet (gest. 1488) vermerkte, dass das Rechnen mit 0 noch nicht selbstverständlich ist. Er konstruierte 1484 eine Rechenaufgabe, bei der fünf Lösungen zu finden waren, wobei sich eine Lösung als negative Zahl entpuppte und für eine andere Lösung galt die Null. Die Aufgabe lautete: „Gesucht sind fünf Zahlen von der Art, dass sie zusammen ohne die erste Zahl 120 ergeben, ohne die zweite 180, ohne die dritte 240, ohne die vierte 300 und ohne die fünfte 360“. Er summierte die fünf Zahlen und bildete einen Durchschnitt, wobei er aber als Divisor nicht 5 sondern 4 wählte. Von diesem Ergebnis (1 200 / 4 = 300) subtrahierte er dann jeweils die oben genannten Zahlen (siehe die folgende, verkürzte Darstellung); vgl. Chuquet, Nicolas: Renaissance mathematician.

300	-	120	=	180
300	-	180	=	120
300	-	240	=	60
300	-	300	=	0
300	-	360	=	-60

4 Das von Nikolaus von Kues 1447 gestiftete St.-Nikolaus-Hospital in Bernkastel-Kues besteht noch heute.

Die Null, eine Erfindung der Inder, fand in Europa erst im 16. Jahrhundert eine Anerkennung.

„nos numerus sumus et fruges consumere nati“ (*ep*. I 2,27) heißt es beim römischen Dichter Horaz (65 - 8 v. Chr.). Bernhard Kytzler und Durs Grünbein übersetzen numerus mit Nullen anstelle „(bloße) Nummern sind wir.“

Italienische Schule

Die Anfänge einer entwickelteren kaufmännischen Rechnung gehen auf die Italiener zurück. Viele Begriffe aus der Finanzwelt sind noch heute gebräuchlich, wie zum Beispiel Giro, Disagio, Lombardgeschäfte, Diskont, Saldo, Bankrott usw. Auch die doppelte Buchführung und der Wechsel (Tratte) sind italienischer Herkunft. Um 1500 galt Venedig als die Ausbildungsstätte der süddeutschen jungen Kaufleute. Der spätere Hauptbuchhalter der Fugger, Matthäus Schwarz, war in seiner Jugend nach Italien gekommen, um die Buchhaltung zu erlernen.

Eine große Rolle spielten Proportionen in der darstellenden und in der bildenden Kunst der Renaissance: Leonardo da Vinci (1452 - 1519), Albrecht Dürer (1471 - 1528). Leonardo da Vincis Erkenntnisse und Erfindungen auf naturwissenschaftlichem und technischem Gebiet sowie seine gestalterischen Leistungen waren von großer Bedeutung. Genannt sei sein Proportionsschema der menschlichen Gestalt („Der Nabel ist der Mittelpunkt des Körpers“); siehe Abbildung 3.

Summa von Pacioli

In Venedig erschien im Jahr 1494 die „Summa“, das größte Werk von Luca Pacioli (1445/50 - 1514). Der ausführliche Titel lautet: *Suma de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*. Die Summa des Franziskanermönchs Pacioli enthält neben der Abhandlung über die Buchhaltung auch einige Abschnitte über kaufmännische Arithmetik, in denen u.a. auch Aufgaben aus der Zins- und Diskontrechnung enthalten sind.

Erdglobus von Behaim

Um 1492 wurde der Erdglobus („Erdapfel“ genannt) entwickelt. Seine Herstellung soll Martin Behaim (1459 - 1507) angeregt haben. Die Entfernungsangaben auf diesem Globus waren sehr ungenau. Nach Götz Freiherr von Pölnitz ist dieser Globus wahrscheinlich der früheste, mindestens der älteste erhaltene Globus der Welt.

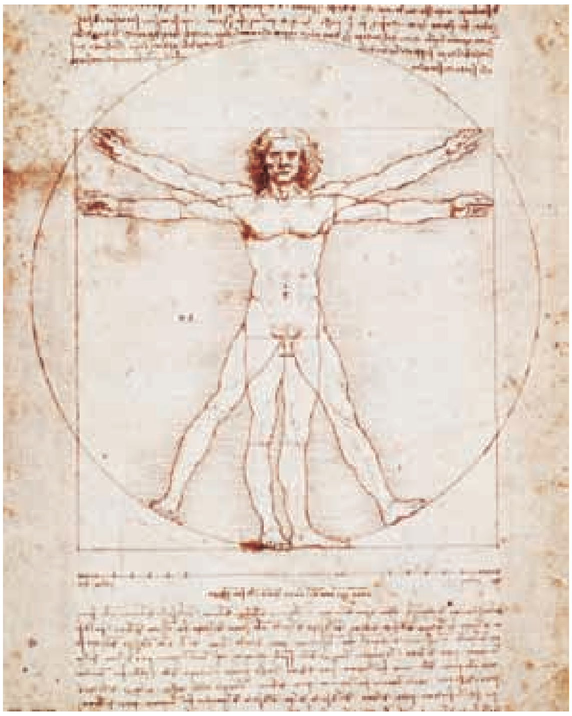


Abb. 3 Proportionsschema der menschlichen Gestalt nach Vitruv von Leonardo da Vinci (1452 - 1519).

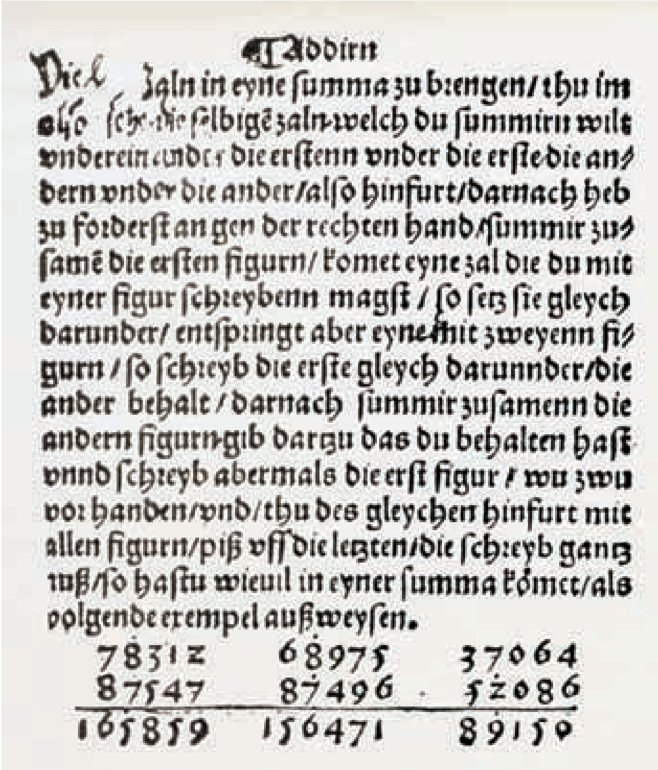
Das Volksrechenbuch von Adam Ries(e)

78 312 und 87 547: Mit diesen beiden ungewohnten Zahlen begannen in Deutschland viele Generationen das schriftliche Addieren zu lernen (s. Abb. 4). Die Regel dazu gab der aus dem fränkischen Staffelstein stammende Adam Ries(e) (1492 - 1559). Im Jahr 1522 vollendete er sein Werk *Rechnung auff der Linihen und Federn* … .

„Kaufmannß Rechnung“ von Peter Apian (1527)

„Nach Adam Riese“ pflegt man zuweilen die Richtigkeit einer Rechnung zu bekräftigen (eigentlich Adam Ries). Nicht so berühmt scheint die 1527 erschienene „Kauffmanß Rechnung“ *(Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung in drey Büchern* …) von Peter Apian (1501 - 1552) zu sein. Weite Kreise kannten seine 1524 herausgegebene *Cosmographia*. Seine in deutscher Sprache erschienene *Kauffmanß Rechnung* verdient in mehrfacher Hinsicht Aufmerksamkeit (z.B. arithmetisches Dreieck, Wucherrechnung, Rossverkauf).

Apian schmückte die Titelseite seiner „Kauffmanß Rechnung“ mit einem arithmetischen Dreieck (bekannter als Pascal‘sches Dreieck). Wie bereits im Passus *Ein Blick in die Historie der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (s. S. 79) erwähnt wurde, war


Addirn

Viel zaln in eyne summa zu brengen/ thu im also setz die selbigẽ zaln welch du summirn wilt
vndereinander/ die erstenn vnder die erste die an-
dern vnder die ander/also hinfurt/darnach heb
zu forderst an gen der rechten hand/summir zu-
samẽ die ersten figurn/ komet eyne zal die du mit
eyner figur schreybenn magst / so setz sie gleych
darunder/ entspringt aber eyne mit zweyenn fi-
gurn / so schreyb die erste gleych darunnder/die
ander behalt / darnach summir zusamenn die
andern figurn gib darzu das du behalten hast
vnnd schreyb abermals die erst figur / wu zwu
vor handen/vnd/thu des gleychen hinfurt mit
allen figurn/piß vff die letzten/die schreyb gantz
nuß/so hastu wieuil in eyner summa komet/als
volgende exempel außweysen.

78312	68975	37064
87547	87496	52086
165859	156471	89150

Abb. 4 Aus: Das 2. Rechenbuch von Adam Ries. Nachdruck der Erstausgabe Erfurt 1522. Von Stefan Deschauer. München 1991.

das die erste Darstellung der Binomialkoeffizienten im christlichen Abendland. Seine Zinseszinsaufgaben wies Apian unter Wucher aus. Beim Rossverkauf zeigt Peter Apian eine geometrische Progression (s. Abb. 6).

Die genannte Schrift von Apian wurde zu dessen Lebzeit noch viermal aufgelegt. Bei der fünften Auflage von 1544 zeigt das Titelbild eine Gegenüberstellung der beiden Rechenverfahren „auf den Linien“ und „mit der Feder“. Anläßlich des 500. Geburtstags von Peter Apian erschien 1995 die „Kaufmannß Rechnung“ als Faksimile. Peter Apian leistete so auch einen Beitrag zur Entwicklung der deutschen Sprache.

Der aus Sachsen eingewanderte Peter Apian (eigentlich Bienewitz) unterrichtete an der 1472 gegründeten Universität Ingolstadt den jungen bayerischen Erbprinzen Albrecht V. (1528 - 1579) in Kosmo- und Geographie wie in Mathematik. Sein Lehrbuch der Astronomie auf geozentrischer Grundlage *Astronomicum caesareum* widmete Apian Kaiser Karl V., der ihn in den Reichsritterstand erhob. Am Rande sei aufgeführt: Der Landsassenbrief Kurfürst Friedrichs II. für den Professor der Mathematik Peter Apian vom 6. Juni 1547, der ihm für das erkaufte Dorf Ittelhofen im Amt Holnstein [Seubersdorf i.d.Opf.] gegeben wurde.

An dieser Stelle ist ein Werk von Michael Stifel (1487 - 1567) zu nennen, das 1546 in Nürnberg erschien: *Rechenbuch von der Welschen und Deutschen Practick, auff allerley vorteyl und behendigkeit … zu machen*.

Förderung der deutschen Sprache

Die neuhochdeutsche Sprache hat Martin Luther durch seine Übersetzung der Bibel und mit seinen deutschen Schriften stark beeinflusst (1522 erschien das *Neue Testament*). Begünstigt wurde dies durch die zuvor gelungene Erfindung der Buchdruckerkunst durch Johannes Gutenberg (vor 1400 - 1468). Luther wollte das Deutsche ebenbürtig neben die drei Sprachen des Mittelalters (Hebräisch, Griechisch und Latein) stellen. Als ältestes deutsches Buch gilt der Abrogans (8. Jahrhundert).

Das erste große Geschichtswerk in deutscher Sprache schrieb Johannes Turmair (1477 - 1534), der sich Aventinus nannte: Die *Baierische Chronik* (bis 1519) wurde 1566 gedruckt. Im Jahr 1523 gab er eine Karte von Ober- und Niederbayern heraus, die als früheste Karte des bayerischen Raums gelten muss (Georg Hanke). Sein humanistisches Wissen erwarb Aventinus auf den ersten Hochschulen seiner Zeit (Krakau, Wien und Paris).

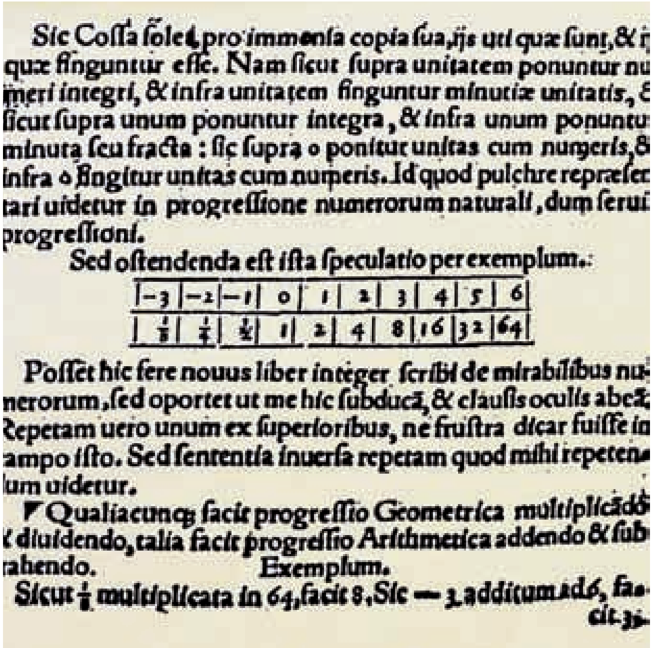
Erste Ansätze zu den Logarithmen bei Michael Stifel

Das Rechnen mit Potenzen von beliebigen rationalen Exponenten findet sich in der von Michael Stifel 1544 in Nürnberg herausgebrachten Schrift *Arithmetica integra*. Er stellte eine arithmetische Reihe einer geometrischen gegenüber (s. Abb. 5):

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

Diese Tabelle wird als eine erste Logarithmen-Tafel (zur Basis 2) angesehen. Die Lücken in der geometrischen Reihe waren allerdings noch groß. Jede positive Zahl (außer 1) kann bekanntlich als Basis zur Potenzdarstellung der positiven Zahlen gewählt werden. Noch fehlen die Dezimalbrüche. In der arithmetischen Reihe fand die Null ihren Platz und die negativen Zahlen treten auch in Erscheinung. Letztere bezeichnet Stifel „absurd“ und „fiktiv“.

Betrachtet man die Zahlen der oberen Reihe als die Exponenten, dann sind die Zahlen in der unteren Reihe die Werte der Potenzen zur Basis 2. Mit diesen Reihen lassen sich Multiplikationen und Divisionen, aber auch Wurzelberechnungen ausführen – wenn auch auf bescheidenem Niveau.



Sic Cossa solet, pro immensa copia sua, iis uti quæ sunt, & i[...]
quæ finguntur esse. Nam sicut supra unitatem ponuntur nu[...]
meri integri, & infra unitatem finguntur minutiæ unitatis, &
sicut supra unum ponuntur integra, & infra unum ponuntu[...]
minuta seu fracta: sic supra o ponitur unitas cum numeris, &
infra o fingitur unitas cum numeris. Id quod pulchre repræsen[...]
tari uidetur in progressione numerorum naturali, dum serui[...]
progressioni.

Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.:

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Posset hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus nu[...]
merorum, sed oportet ut me hic subducã, & clausis oculis abeã.
Repetam uero unum ex superioribus, ne frustra dicar fuisse in
campo isto. Sed sententia inuersa repetam quod mihi repeten[...]
dum uidetur.

Qualiacunq; facit progressio Geometrica multiplicãdo
& diuidendo, talia facit progressio Arithmetica addendo & sub[...]
trahendo. Exemplum.

Sicut $\frac{1}{8}$ multiplicata in 64, facit 8, Sic − 3 additum ad 6, fa[...]
cit 3.

Abb. 5 Aus: Stifel, Michael: Arithmetica integra. Nürnberg 1544.

Stifel schreibt (fol. 149 - 150): „Est autem -3 exponens ipsius 1/8, sicut 6 ...“ (Es ist -3 der Exponent von 1/8, so auch 6 der Exponent der Zahl 64 und 3 der Exponent der Zahl 8). Das bedeutet:

1/8 mal 64 = 8 (geometrische Reihe)
-3 plus 6 = 3 (arithmetische Reihe).

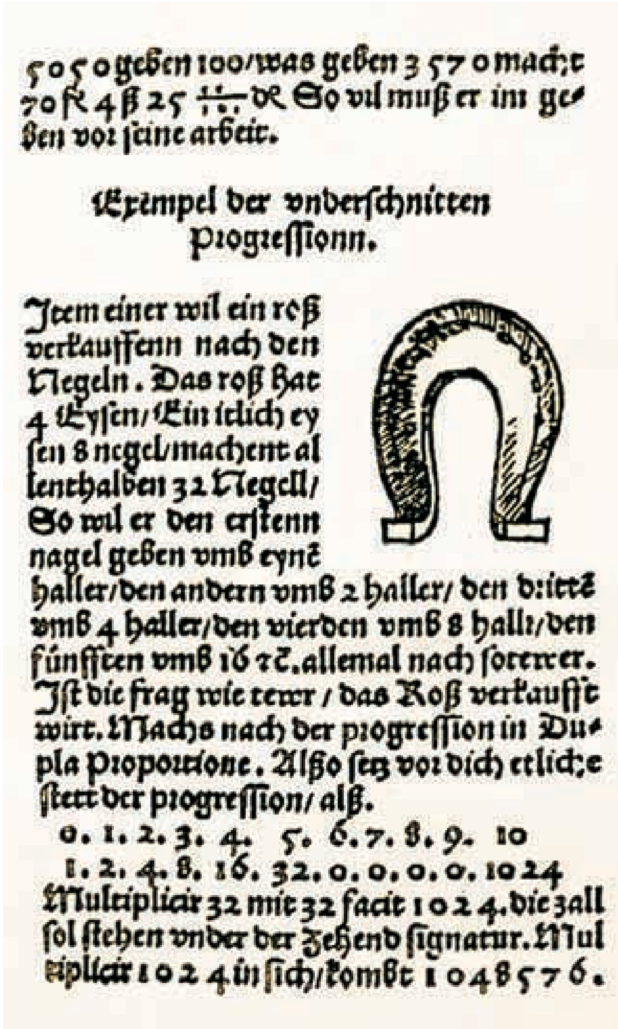
Nachfolgend zwei Beispiele, wie mit diesen Reihen gerechnet werden kann:

Soll beispielsweise 4 mit 16 multipliziert werden, so sucht man die über 4 und 16 stehenden Zahlen und findet 2 und 4. Diese werden addiert und unter der Summe 6 liest man das Ergebnis 64 ab.

Das Wurzelziehen (Radizieren) ermöglicht die Division. So erhält man die dritte Wurzel aus 64 folgendermaßen: Der Zahl 64 in der geometrischen Reihe entspricht die Zahl 6 in der arithmetischen Reihe. Sodann dividiert man 6 durch 3 und erhält das Ergebnis 2. Dem in der arithmetischen Reihe ausgewiesenen Wert 2 entspricht die Zahl 4 in der geometrischen Reihe, das ist der gesuchte Wurzelwert.

Mit diesen Zahlenreihen von Stifel werden sich später noch weitere Personen befassen, darunter wohl auch Jost Bürgi. Eine allgemeine Anerkennung fanden die negativen Zahlen aber noch lange nicht.

Vor Stifel stellte bereits Peter Apian in seiner 1527 herausgegebenen Schrift „Kauffmanß Rechnung“ bei der Aufgabe zum



5050 geben 100/was geben 3570 macht
70 fl 4 ß 25 $\frac{11}{101}$ dl So vil muß er im ge-
ben vor seine arbeit.

Exempel der underschnitten
Progressionn.

Item einer wil ein roß
verkauffenn nach den
Negeln. Das roß hat
4 Eysen/ Ein iclich ey
sen 8 negel/machent al
lenthalben 32 Negell/
So wil er den erstenn
nagel geben umb eynẽ
haller/den andern umb 2 haller/ den dritt̃
umb 4 haller/den vierden umb 8 hall:/den
fünfften umb 16 rc. allemal nach fotrer.
Ist die frag wie tewr / das Roß verkaufft
wirt. Machs nach der progression in Du-
pla proportione. Alßo setz vor dich etliche
stett der progression/ alß.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10
1. 2. 4. 8. 16. 32. 0. 0. 0. 0. 1024

Multiplicir 32 mit 32 facit 1024. die zall
sol stehen under der zehend signatur. Mul
tiplicir 1024 in sich/kombt 1048576.

Abb. 6 Aus: Apian, Peter: Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung … . Nachdruck [der Ausgabe Ingolstadt 1527]. Buxheim 1995.

Rossverkauf eine arithmetische Progression einer geometrischen gegenüber (s. Abb. 6). Die arithmetische Reihe beginnt mit 0 und die geometrische mit 1.

An das fortgesetzte Halbieren einer Strecke sei hier erinnert: Eine Strecke läßt sich durch wiederholtes Halbieren in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Abschnitte teilen.

1554 erste Landvermessung Bayerns durch Philipp Apian

Der bayerische Herzog Albrecht V. (1528 - 1579) beauftragte 1554 Philipp Apian (1531 - 1589), den Sohn seines ehemaligen Lehrers Peter Apian, mit der ersten bayerischen Landvermessung. Bereits mit 21 Jahren wurde Philipp Apian der Nachfolger seines Vaters an der Universität in Ingolstadt. Philipp Apian schuf ein für die damalige Zeit erstaunliches Werk, die Mappa. Der Auftrag an Apian sollte nicht nur zur Förderung der Wissenschaft beitragen, er hatte auch praktische Gründe: Von der Erfassung des Landes sollte auch eine neu zu regelnde Steuererhebung ausgehen, denn die Staatskasse war leer.

Die *Baierischen Landt-Tafeln* erschienen 1568 in Ingolstadt. Wegen seiner Neigung zum Protestantismus ging Philipp Apian 1569 an die Universität Tübingen. Diese Stelle verlor er, weil er die Concordienformel nicht unterschreiben wollte. Er wurde durch seinen früheren Schüler Mästlin (Lehrer von Kepler) ersetzt und starb 1589.

Gregorianische Kalenderreform 1582

Schon Papst Sixtus IV. (reg.1471 - 1484) wollte den Kalender reformieren und holte Regiomontanus als Berater, der jedoch bald nach seiner Ankunft in Rom (1476) verstarb. Der aus Königsberg (Franken) stammende Regiomontanus, eigentlich Johann Müller (1436 - 1476), gab Kalender und Ephemeriden (Angaben über die tägliche Stellung der Himmelskörper) heraus, die u. a. Kolumbus und Vespucci benutzten. Regiomontanus zählt zu den bedeutendsten Mathematikern des 15. Jahrhunderts in Europa. Ihm schwebte eine Revision der Lehre von der Planetenbewegung vor (nach Rudolf Wolf ein Missverständnis, S. 231).

Papst Gregor XIII. (reg. 1572 - 1585) gelang es 1582 nach einer über drei Jahrhunderte andauernden Diskussion über die Verbesserung des Kalenders die Kalenderreform durchzusetzen (s. S. 138). An dieser wirkte Christophorus Clavius (1537 - 1612, eigtl. Christoph Klau) entscheidend mit. Der in Bamberg geborene Mathematiker und Jesuit war auch Mitglied der Kalenderkommission. Auf ihn gehen übrigens einige Osterparadoxien zurück; vgl. „Bayern in Zahlen“ 4/2000, S. 151. Der bereits genannte Aloisius Lilius, der zur Verbesserung des Kalenders Vorschläge unterbreitete, war bereits 1576 verstorben (s. „Bayern in Zahlen“ 12/1999, S. 537).

Clavius brachte 1574 eine lateinische Ausgabe der *Elemente* des Euklid heraus. In seinem 1593 erschienen Buch *Astrolabium* berichtete Clavius auch über die „Prosthaphaerese“ (s.u.). Seine *Algebra* (1608) bündelte die Lehre der Cossisten (Frühform der Algebra im 15. und 16. Jahrhundert; Cosa = ital. Bezeichnung für die Unbekannte in einer Gleichung). René Descartes (1596 - 1650) lernte Geometrie und Algebra nach den Ausgaben von Clavius.

Nach dieser Abschweifung noch einige Anmerkungen zum Gregorianischen Kalender: In seiner *Geschichte der Astronomie* bemerkte Rudolf Wolf (S. 331): „… während ihn die Annahme des von Omar-Cheian[5], Astronom des seldschuckischen Sultans Malek-Schah, um 1080 in Persien eingeführten rationellen Cyclus von 33 Jahren mit 8 Schaltjahren in 12mal kürzerer Zeit sogar auf 14½ sec heruntergebracht hätte.“

Im Kalenderstreit versuchte Johannes Kepler (1571 - 1630) als Befürworter der Gregorianischen Kalenderreform zu vermitteln. Für Kaiser Matthias schrieb Kepler ein Gutachten und begleitete diesen 1613 zum Reichstag zu Regensburg, um dasselbe zu vertreten. Dieses Thema wurde dort aber nicht behandelt.

Wenig bekannt ist, dass sich Kepler auch mit dem Geburtsjahr Jesu auseinandergesetzt hatte. Ein 1604 auftretendes Himmelsphänomen (Supernova) wies wahrscheinlich Parallelen zur Geschichte vom Stern von Bethlehem auf und war für Kepler und andere Anlaß, über die Zeitrechnung nachzudenken (siehe „Bayern in Zahlen“ 12/1999, S. 540). Die Theorie von Kepler bestätigten später Ludwig Ideler (1766 - 1846) und Konradin (Graf) Ferrari d’Occhieppo (1907 - 2007).

Julianische Periode

Fast gleichzeitig mit der Kalenderreform führte Joseph Justus Scaliger (1540 - 1609) die nach seinem Vater benannte „Julianische Periode“ ein, die sich aus dem 28-jährigen Sonnenzirkel, dem 19-jährigen Mondzirkel und dem 15-jährigen Indiktionszirkel („Römerzinszahl“) zusammensetzt mit einer Periode von 7 980 ($= 28 \cdot 19 \cdot 15$) Jahren.

Julianischer Tag

Die fortlaufende Zählung von Tagen kam erst im 19. Jahrhundert auf. Sie ist erstmals 1849 in John Herschel‘s Buch *Outlines of Astronomy* nachweisbar, vgl. Franz Krojer: Die Präzision der Präzession. München 2003, Seite 436.

Noch immer mangelt es an der korrekten Bezeichnung für diese Zählung. Zutreffend ist hierfür „Julianische Tageszahl“ oder „Julianischer Tag“, nicht „Julianisches Datum“. Mit dem Julianischen Kalender hat diese Größe nichts zu tun. Die Julianische Tageszahl ist eine fortlaufende Zählung von Tagen vom Beginn des Jahres 4713 vor Christus (-4712).

5 Unterschiedliche Schreibweisen für einen der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

Diskont-Tabellen von Simon Stevin (1548 - 1620)

Im Jahr der Einführung des Gregorianischen Kalenders (1582) wurde die Schrift *Tafelen van Interest* des 1548 zu Brügge geborenen Simon Stevin veröffentlicht. Von ihr war an anderer Stelle schon die Rede.

Simon Stevin, ein Verfechter der Dezimalbruchrechnung, publizierte im Jahr 1585 sein Werk *De Thiende*. Im gleichen Jahr erschien auch seine *La Pratique d'Arithmétique.* In: *L´Arithmetique*. Leyden 1585, die Tabellen mit Abzinsungen (Diskontierung) enthielt.

Stevin trat für die Einführung dezimal unterteilter Münz-, Maß- und Gewichtssysteme ein. Bei ihm fanden negative Zahlen bereits Anerkennung und er setzte sich auch für die indisch-arabische Zahlenschreibweise von Brüchen ein. Den für den Schiffbau wichtigen Begriff des Metazentrums führte übrigens Stevin ein. Er war ein Anhänger der kopernikanischern Lehre.

Für die Bestimmung der Anzahl der Zinsperioden mussten aber erst noch die Logarithmen erfunden werden. Die von Stevin bearbeiteten Tafeln zur Berechnung von Zinseszinsen sollen von Jost Bürgi fortgesetzt worden sein.

Die Mercatorkarte

Im Jahr 1587 erschienen die Erdkarten von Gerhard Kremer (1512 - 1594), genannt Mercator. Die Mercatorkarte war für Geographie und Nautik bedeutsam. Er führte den Begriff Atlas für Landkartensammlung ein.

Steigende Ansprüche an Rechenverfahren: Prosthaphaerese

Die gestiegenen Ansprüche an Rechenverfahren verlangten nach einer Erleichterung der Rechenarbeiten. Die ersten Einflüsse gingen dabei von der Astronomie aus. Es sei daran erinnert, dass die Daten des auf Genauigkeit bedachten Tycho Brahe (1546 - 1601) Kepler die Auffindung seiner Planetengesetze ermöglichten.

Mit dem Rechenverfahren „Prosthaphaerese" wurden Multiplikationen und Divisionen durch Addition und Subtraktion trigonometrischer Funktionen ersetzt. Das Wort Prosthaphaerese ist ein Zusammenzug von Prosthesis (griech. Addition) und Aphaerese (griech. Wegnahme). Paul Wittich hat dieses Verfahren mit Tycho Brahe ausgearbeitet. Mit diesem Verfahren beschäftigte sich zuvor schon der zu Nürnberg geborene Johannes Werner (1468 - 1528). Die „Prosthaphaerese" wurde später durch das logarithmische Rechnen verdrängt.

Anfänge der Prosthaphaerese finden sich nach Rudolf Wolf (*Geschichte der Astronomie*) schon bei Albategnius, die dann wieder verloren gingen oder übersehen wurden, so dass das Ganze im 16. Jahrhundert noch einmal von Anfang an erfunden werden musste. Albategnius (Battani), der 929 verstarb, berechnete auf Grund seiner Beobachtungen bis in das Mittelalter benutzte Tafeln der Örter der Planeten. Er bestimmte die Präzession, die Elemente der Sonnenbahn und die Jahreslänge neu. Die Trigonometrie förderte er durch Einführung der trigonometrischen Funktionen.

Ein Beispiel für die Division mittels Prosthaphaerese

Eine wichtige Formel lautete:

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$. Mit dieser Formel wird erläutert, wie Divisionen ausgeführt wurden. Abbildung 7 gibt hierfür ein Beispiel.

II Division $\frac{A}{B}$

$$\frac{A}{B} = 10^n \frac{a}{b} \qquad a = \sin\alpha$$

$$= 10^n \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad b = \operatorname{cosec}\beta$$

Beispiel: $\frac{207{,}343}{51{,}7886}$

mit einer 6stelligen Sinus-Tafel auszuführen

$$A = 207{,}343 \qquad n = 2$$

$$B = 51{,}7886 \qquad a = 0{,}207343 = \sin\alpha$$

$$b = 5{,}17886 = \operatorname{cosec}\beta$$

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 11^\circ\, 58' \\ \beta = & 11^\circ\, 8' \\ \hline \alpha - \beta = & 0^\circ\, 50' \\ \alpha + \beta = & 23^\circ\, 6' \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \cos(\alpha - \beta) = & 0{,}999894 \\ \cos(\alpha + \beta) = & 0{,}919821 \\ \hline \text{Differenz} & 0{,}080073 \\ \sin\alpha \cdot \sin\beta = & 0{,}040036 \\ \frac{A}{B} = & 4{,}0036 \\ \text{genauer Wert} & 4{,}003641. \end{array}$$

Abb. 7 Quelle: Nova Kepleriana. Neue Folge-Heft 5: Die Coss von Jost Bürgi in der Redaktion von Johannes Kepler. Ein Beitrag zur frühen Algebra. Bearbeitet von Martha List und Volker Bialas. München 1973. (= Bay. Akad. der Wissensch. Math.-Naturwiss. Klasse. Abhandlungen Neue Folge, Heft 154).

Eine Art Prosthaphaerese nach Leibniz

Dem Begriff Prosthaphaerese begegnet man auch bei Leibniz. Er schätzte das voraussichtliche künftige oder mittlere Leben eines Kindes auf (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 usw. + 80) / 81 Jahre und verglich dies mit der Weise, in der die Bauern bei der „Braunschweiger Teilung" vorgehen, wenn Erbschaften zu teilen oder Grundstücke zu schätzen sind. Dabei werden drei Schätzungen vorgenommen, eine jede von ein paar Männern, die zu diesem Zweck ausersehen wurden. Das Volk dort nennt sie die drei Schürzen (Schurzen). Festgesetzt werden der dritte Teil der Gesamtsumme oder ein Drittel. Leibniz wörtlich: „Dies wäre der mittlere Wert, der durch eine Art Prosthaphaerese gesucht wurde, woraus der Beweis für dieses Vorgehen auf der Hand liegt. Da hier 81 Schätzungen mit gleichem Recht vorgenommen werden können, kann nämlich auf dieselbe Weise das Leben dieses Kindes auf entweder 0 oder 1 oder 2 oder 3 oder 4 usf. Jahre bis zu 80 geschätzt werden, …"

Vorläufer der Logarithmen

Jost Bürgi (1552 - 1632) erweiterte die Prosthaphaerese und wandte sie auch an. Er suchte aber nach anderen Hilfsmitteln zur Bewältigung der Rechenarbeiten. Nicht nur Bürgi war wohl die Gegenüberstellung einer arithmetischen und einer geometrischen Progression bekannt, die Michael Stifel 1544 in seinem Werk *Arithmetica integra* publizierte. Bürgi wusste wohl auch vom Bemühen des Simon Stevin, dass die Dezimalbrüche Verbreitung finden. Der zu Lichtensteig im Toggenburg (Schweiz) geborene Bürgi kam 1579 zu Landgraf Wilhelm IV. nach Kassel. 1603 wurde er von Kaiser Rudolf II. nach Prag berufen.

Bürgi und John Neper (Napier; 1550 - 1617) fanden voneinander unabhängig erste Lösungen für „Logarithmentafeln". Ihre Tafeln waren aber noch keine Logarithmen im heutigen Sinn. Neper veröffentlichte vor Bürgi im Jahr 1614 seine *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio.*

Mit Neper stand Henry Briggs (1556 - 1630) in Verbindung. Dieser erkannte den Vorteil, den Logarithmen mit der Basis 10 für das praktische Rechnen haben. Im Jahr 1617 erschien seine *Logarithmorum chilias prima* und 1624 das Werk *Arithmetica logarithmica*. Briggs beschränkte sich nur auf die ganzen Zahlen von 1 bis 20 000 und 90 000 bis 100 000, diese berechnete er aber auf 14 Stellen. Adriaan Vlacq (1600 - 1667) ergänzte die Lücken in Briggs Tafel.

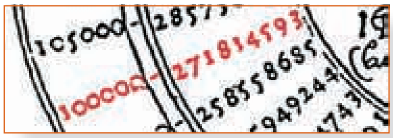
Progress Tabulen von Jost Bürgi

Tatsächlich war Bürgi schon früher im Besitz (1588) seiner „Progress Tabulen", die er jedoch erst 1620 unter dem Titel *Aritmetische und Geometrische Progress Tabulen/sambt gründlichem unterricht/wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/und verstanden werden sol* veröffentlichte (s. Abb. 8). Kepler bezeugte, dass Bürgi vor Napier über seine Tabulen verfügte: „der zögernde Mann jedoch, der seine Geheimnisse bewachte, ließ das Kind bei der Geburt im Stich, und er erzog es nicht (durch sofortige Drucklegung) zum öffentlichen Nutzen" (zitiert nach Rudolf Wolf).

Nach H.G. Zeuthen benutzte Kepler Logarithmen bei der Ausarbeitung der 1627 erschienenen „Rudolphinischen Tafeln", die auf den Beobachtungen von Tycho Brahe basierten.

Bürgi berechnete eine „Logarithmentafel", deren Basis fast genau die Zahl e war: der Wert $1{,}0001^{10\,000} = 2{,}71814593$ stimmt bereits auf drei Nachkommastellen mit $e = 2{,}71828182\ldots$ überein (s. Abb. 8, S. 110).

Setzt man anstelle von 1,0001 die Zahl 1,000100005000166 ein, so erhält man die Zahl e auf zehn Stellen genau.



Die sich daraus ergebende Entwicklung war damals noch nicht abzusehen. Man denke dabei nur an die Wahrscheinlichkeits- und die Zinseszinsrechnung.

Fraglich, ob damals schon Klarheit darüber bestand, dass $x^a = b$ etwas anderes bedeutet als $a^x = b$. Der erste Ausdruck bedeutet heute Potenzieren und der letzte ist eine Exponentialfunktion. Die Umkehrung des ersten Ausdrucks $x^a = b$ ist die lytische Operation des Wurzelziehens, also $x = \sqrt[a]{b}$.

Für den zweiten Ausdruck war aber damals noch keine Lösungsmöglichkeit bekannt.

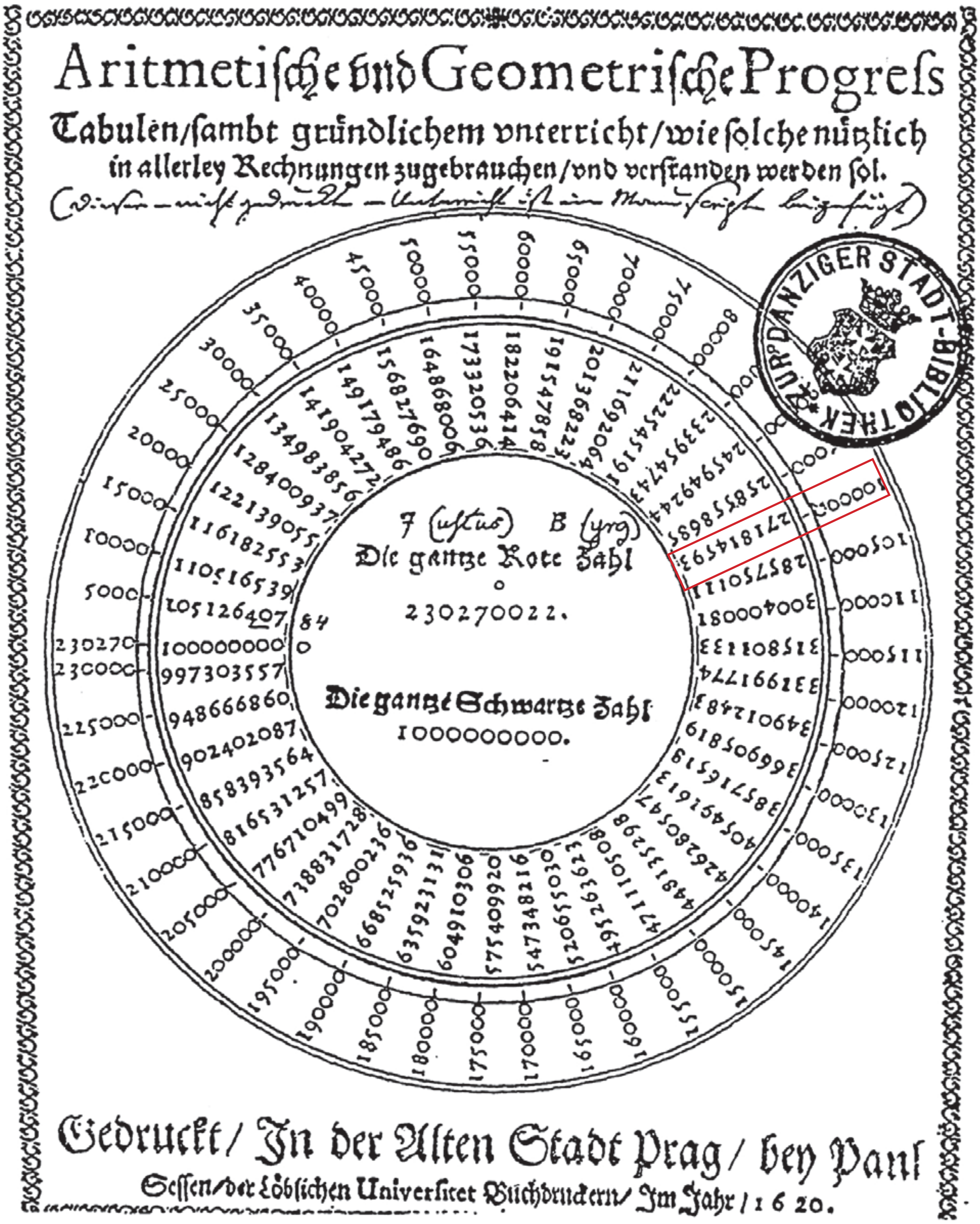
Die Beziehungen der Exponentialfunktion und deren Umkehrung wurden erst im 18. Jahrhundert durch Euler aufgeschlossen.

Es wurde bereits erwähnt, dass jede positive Zahl (außer 1) als Basis zur Potenzdarstellung der positiven Zahlen gewählt werden kann. Daher gibt es dementsprechend viele Logarithmensysteme. Heute sind von besonderer Bedeutung: die dekadischen oder Zehnerlogarithmen, die natürlichen Logarithmen und die dualen oder binären (dyadischen) Logarithmen.

Logarithmisches Rechnen – Symbol e

Die historische Entwicklung der Theorie der Logarithmen nach Neper und Bürgi schildert Felix Klein (1849 - 1925) in seinem Buch *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus I*. Dort begegnet man Namen wie Nicolaus Mercator (Kaufmann), Isaac Newton, Brook Taylor und Leonhard Euler. Hier eine grobe Skizzierung zur weiteren Entwicklung der Logarithmen.

Nicolaus Mercator (1620 - 1687) [eigentl. Kaufmann] hat die Bezeichnung „natürlicher Logarithmus" oder auch „hyperbolischer Logarithmus" eingeführt. Sein Buch *Logarithmotechnica* erschien 1668 in London.



Titelblatt des Exemplars der Danziger Stadt-Bibliothek mit den handschriftlichen Korrekturen 84 und 0, wahrscheinlich von Benjamin Bramer, vielleicht sogar von Bürgi selbst. Die Zahlen im äusseren Kreise, die Logarithmen der zugeordneten Zahlen des inneren Kreises, sind im Original rot.

Abb. 8 Aus: Jost Bürgi's „Progress Tabulen“ (Logarithmen) / nachgerechnet und kommentiert von Heinz Lutstorf und Max Walter. Schriftenreihe der ETH-Bibliothek, Nr. 28. Zürich 1992.

Als nächstes sind die Arbeiten von Newton (1643 - 1727) aufzuführen: der allgemeine binomische Satz und die Methode der Reihenumkehrung.

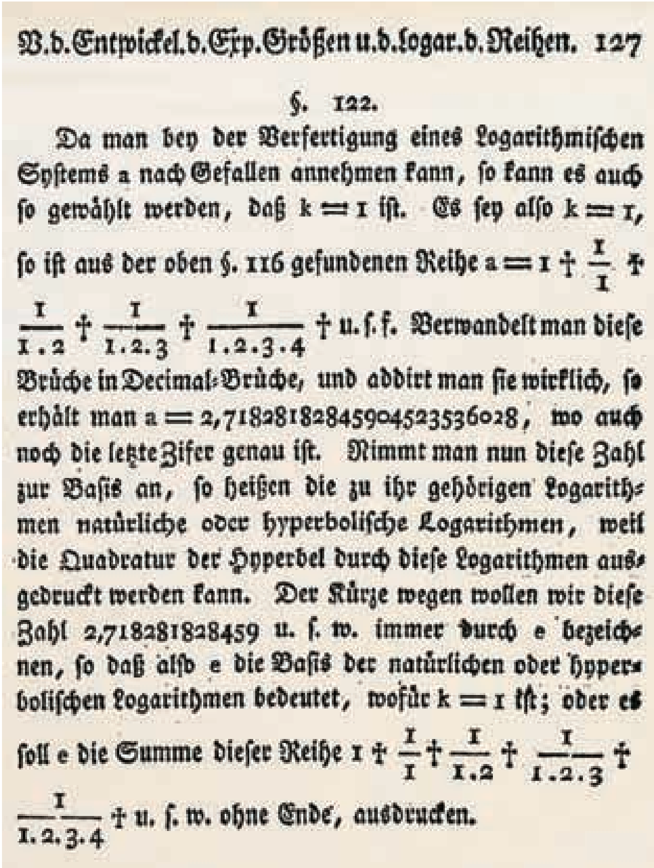
Brook Taylor (1685 - 1731) fand einen bequemeren Weg zur Ableitung der Exponentialreihe. In seinem Werk *Methodus incrementorum Directa & Inversa* stellte er 1715 die nach ihm benannte Reihe dar. Felix Klein bemerkt an anderer Stelle (S. 251): „Die geschichtliche Quelle der Entdeckung des Taylorschen Satzes tatsächlich die Differenzenrechnung ist.“

Schließlich nennt Felix Klein die 1748 in Lausanne erschienene Schrift von Leonhard Euler (1707 - 1783) *Introductio in analysin infinitorum*, in der es heißt: „Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828 ... constanter literam e...“
In der Übersetzung von Johann A. Michelsen heißt es im § 122: „Der Kürze wegen wollen wir diese Zahl 2,71828 18284 59 u.s.w. immer durch e bezeichnen, so dass also e die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bedeutet, ...“. Abbildung 9 zeigt einen Ausschnitt aus der genannten Schrift. Die dort ausgewiesene Zahl e mit 23 Nachkommastellen beeindruckt. Euler bemerkte dazu, dass noch die letzte Ziffer genau ist. Euler bringt dazu zwei Beispiele. Beim ersten Beispiel wird gefragt, wie viele Jahre es dauert, bis das menschliche Geschlecht auf das Zehnfache anwächst – bei einer jährlichen Vermehrung von einem hundertstel. Im zweiten Beispiel geht es um die Anzahl der Jahre bis eine Schuld abgetragen wird bei jährlicher Rückzahlung eines festgelegten Betrages und einem vereinbarten Zins.

Im Jahr 1737 erkannte Euler, dass e eine irrationale Zahl ist. Den Beweis der Transzendenz erbrachte 1873 Charles Hermite. Mit der Zahl e waren Grundlagen für verschiedene Bereiche, darunter auch die Zinseszins- und Wahrscheinlichkeitsrechung geschaffen worden.

Felix Klein, der sich auch der Mathematikdidaktik („Erlanger Programm“) widmete: „Wenn wir uns nun zum *19. Jahrhundert* wenden, so bemerken wir eine weitgehende *Popularisierung der Logarithmen*, die einmal damit zusammenhängt, dass *in den zwanziger Jahren* die Logarithmen auf der Schule *eingeführt* werden, dann damit, dass sie mehr und mehr *Anwendung in der physikalischen und technischen Praxis* finden.“ (Felix Klein, S. 187).

Genannt sei schließlich der Tröpfel-Algorithmus, ein Verfahren zur Berechnung eines Näherungswertes zu einer Zahl, das


V. d. Entwickel. d. Exp. Größen u. d. Logar. d. Reihen. 127

§. 122.

Da man bey der Verfertigung eines Logarithmischen Systems a nach Gefallen annehmen kann, so kann es auch so gewählt werden, daß k = 1 ist. Es sey also k = 1, so ist aus der oben §. 116 gefundenen Reihe $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ + u. s. f. Verwandelt man diese Brüche in Decimal-Brüche, und addirt man sie wirklich, so erhält man a = 2,71828182845904523536028, wo auch noch die letzte Zifer genau ist. Nimmt man nun diese Zahl zur Basis an, so heißen die zu ihr gehörigen Logarithmen natürliche oder hyperbolische Logarithmen, weil die Quadratur der Hyperbel durch diese Logarithmen ausgedruckt werden kann. Der Kürze wegen wollen wir diese Zahl 2,718281828459 u. s. w. immer durch e bezeichnen, so daß also e die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bedeutet, wofür k = 1 ist; oder es soll e die Summe dieser Reihe $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ + u. s. w. ohne Ende, ausdrucken.

Abb. 9 Aus: Euler, Leonhard: Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen / 1 / aus dem Latein. übers. und mit Anm. und Zusätzen begleitet von Johann Andreas Christian Michelsen. Berlin 1788.

die Dezimalstellen eine nach der anderen liefert. So erhält man
$$e = 1 + \frac{1}{1}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{4}(\ldots)))).$$
Bemerkenswert ist, dass dieses Verfahren erst 1968 von Arthur H. J. Sale entdeckt worden ist.

Der Nutzen der Logarithmen

Die Einführung der Logarithmen war eine herausragende mathematische Neuschöpfung des Abendlandes. Ein Dithyrambe auf diese besondere Zahl e, die wohl zu den bedeutendsten gehört, stimmten viele an. Vom Marquis Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827) stammt der Ausspruch: „Die Erfindung der Logarithmen kürzt monatelang währende Berechnungen bis auf einige Tage ab und verdoppelt dadurch sozusagen das Leben (der Rechner).“

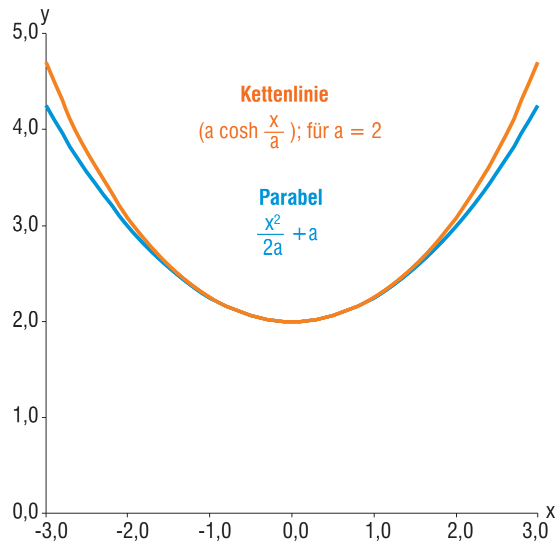
Leonhard Euler (1707 - 1783) drückte sich so aus: „Der größte Nutzen, welchen die Logarithmen gewähren, zeigt sich bei der Auflösung solcher Gleichungen, wo die unbekannte Größe ein Exponent ist.“ Erst mit Hilfe der Logarithmen konnte eine Gleichung der Form $y = a^x$ gelöst werden.

Die Bedeutung der Logarithmen liegt nicht nur in der enormen Erleichterung des Rechnens. So dienen sie als Arbeitsmittel in vielen Bereichen der höheren Mathematik (z.B. in der Infinitesimalrechnung, bei der Differentialrechnung, in der Funktionentheorie). Zitiert sei der folgende Satz von Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855): „Sie ahnen nicht, wieviel Poesie in der Berechnung einer Logarithmentafel enthalten ist.“

Die hängende Kette

Bei der Lösung des berühmten Problems der hängenden Kette gab die Zahl e eine Hilfestellung. Mit der Kettenlinie befassten sich namhafte Gelehrte. Galilei (1564 - 1642) ging davon aus, dass diese Kurve eine Parabel ist. Christiaan Huygens (1629 - 1695) bewies als 17-jähriger, dass eine Kettenlinie keine Parabel sein kann. Dann sah man zunächst keine Möglichkeit, wie dieses Problem gelöst werden kann. Des Rätsels Lösung war schließlich: Die Gleichung für die Kettenlinie braucht die magische Zahl e. Der Hyperbelkosinus übernimmt dabei eine wesentliche Rolle. Die Kurve verläuft symmetrisch zur y-Achse, und zwar höher als die Parabel (s. Abb. 10). Die Kettenlinie ist eine parabelähnliche Kurve, die ein biegsamer, undehnbarer Faden bildet, der an zwei Punkten frei aufgehängt ist. Die Kettenlinie gehört zu den transzendenten Kurven.

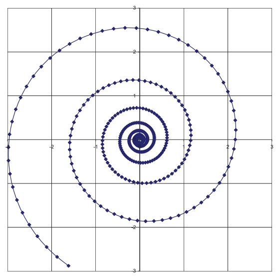
Abb. 10 **Die hängende Kette**



Die logarithmische Spirale

Mit Spiralen beschäftigte sich schon Archimedes (287 - 212). Eine bestimmte Art wurde sogar nach ihm benannt. Die Form der Spirale, die in der Natur häufig anzutreffen ist, nennt man meist die logarithmische Spirale. Wegen einer bestimmten Eigenschaft ist auch von der gleichwinkligen Spirale die Rede. Zuerst wurde sie von René Descartes (1596 - 1650) entdeckt.

Die logarithmische Spirale, auch als Wachstumsspirale bezeichnet, fasziniert durch ihre Eigenschaft, dass sie in jedem Maßstab gleich aussieht. In der Botanik weiß man, dass in natürlichen Spiralen immer wieder spezielle Zahlen vorkommen, so können zum Beispiel die Samen der Sonnenblume 55 Spiralen in der einen und 89 in der anderen Richtung aufweisen. Auf diese Zahlen stößt man auch in der nach Leonardo von Pisa (um 1180 - 1240) benannten Zahlenfolge, der sog. Fibonacci-Reihe: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... ; siehe den Beitrag *Ein Blick in die Historie der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (S. 79).



Jakob Bernoulli (1655 - 1705) war von der logarithmischen Spirale so beeindruckt, dass er von der „Spira mirabilis“ (der wunderbaren Spirale) sprach und ihr eine eigene Abhandlung widmete. Die einzigartigen und erstaunlichen Transformationseigenschaften der logarithmischen Spirale haben Bernoulli so fasziniert, dass er auf seinem Grabstein die Worte „Eadem numero mutata resurget“ eingemeißelt wissen wollte. Seinem Wunsch wurde aber nicht voll entsprochen; Abbildung 11 zeigt das Emblem vom Grabmahl des Jakob Bernoulli.

Mathesis biceps von Juan Caramuel (1670)

Das zweibändige Werk *Ioannis Caramuelis Mathesis biceps* aus dem Jahr 1670 wird erwähnt, weil es die größte mathematische Enzyklopädie jener Zeit sein soll. Abbildung 12 zeigt die Inhaltsübersicht dieses Werkes, das in Vergessenheit geraten zu sein scheint.

Zur Verbreitung der Rechenzeichen

Die älteste bekannte deutsche Algebra, der *Algorithmus Ratisbonensis* (um 1461), hat keinerlei Symbolik (Wolfgang Kaunzner: Das Rechenbuch des Johann Widmann von Eger. München 1954, S. 39). Die Rechenzeichen + und – erscheinen erstmals 1489 in der Schrift *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmannschafft* von Johannes Widmann. Das Zeichen x für die Multiplikation führte 1631 William Oughtred (1574 - 1660) ein. Dieser präsentierte einen Rechenschieber, der diese Bezeichnung durch das Funktionsprinzip verdiente. Der Punkt als Multiplikationszeichen und der Doppelpunkt als Zeichen für die Division wurden von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) eingeführt. Das

Abb. 11 Aus: Bernoulli, Jakob: Die Werke von Jakob Bernoulli. Differentialgeometrie / bearb. und komm. von André Weil …/ 5. Basel … 1999.
(Das Grabmahl wurde im 19. Jahrhundert von der Barfüsserkirche in den Kreuzgang des Basler Münsters verlegt.)

Gleichheitszeichen geht auf Robert Recorde (ca. 1510 - 1558) zurück. Die heutigen Zeichen > und < für größer als und kleiner als stammen von dem englischen Mathematiker Thomas Harriot (1560 - 1621). Die heutige Schreibweise von Potenzen geht auf René Descartes (1596 - 1650) zurück. In der *Arithmetica integra* von Michael Stifel aus dem Jahr 1544 begegnet man schon der Bezeichnung Exponent („exponens").

Außer Rechenzeichen bedarf es auch effizienter Algorithmen oder bestimmter Rechenkniffe. Unter letzteren findet sich die „Ferrol'sche Multiplikation", die hier nicht behandelt wird. Hingewiesen sei auf die „Karatsuba Multiplikation", die erst vor etwa drei Jahrzehnten aufkam. Bei der Division kann das Verfahren von Newton zur Kehrwertberechnung benutzt werden.

Rechenkenntnisse im 18. Jahrhundert

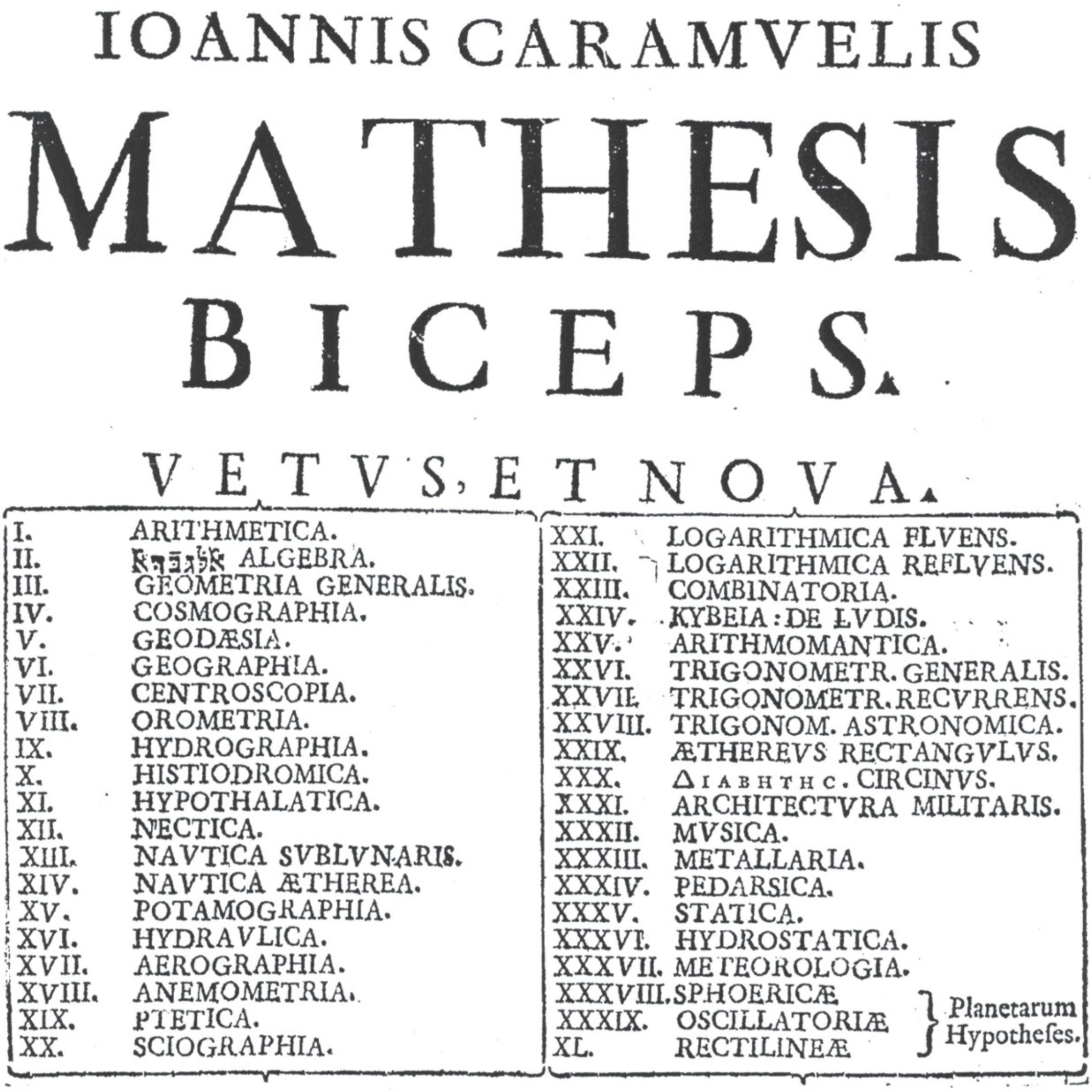
„Bis weit in das 18. Jahrhundert hinein war die breite Masse der Bevölkerung mit Mathematik bzw. Rechnen kaum befasst.", schrieb Ludwig Bauer 1999.

Es ist bemerkenswert, dass Johann A. Kritter sich im Jahr 1781 zu seiner Schrift *Aufklärung der Berechnungen der Wittwen- und Todtencassen für diejenigen, die sich in der Buchstabenrechnung nicht geübt haben* veranlasst sah. Zur Vorgeschichte:

Der bedeutende Mathematiker Leonhard Euler (1707 - 1783), der schon mehrfach genannt wurde, brachte die Ausführungen von Johann August Kritter zur Einrichtung dauerhafter Witwencassen in algebraische Formen (siehe *Nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Witwencaße*. In: Neues Hamburgisches Magazin. 8. Bd., 43.St.,1770). Kritter fand aber, dass diese Schrift von Euler nur denen verständlich ist, welche die höhere Rechenkunst und die Algebra gelernt haben. Deshalb verfasste er seine bereits erwähnte Abhandlung, in der er sich der algebraischen Sprache so viel wie möglich enthalten wollte. Bezeichnend für seine Einschätzung der damaligen Mathematikkenntnisse ist, dass er es für nötig hielt, die Rechenzeichen der Grundrechenarten (., :, -, +, =) zu erklären (s. Abb. 13).

Hankel'sches Permanenzprinzip

Damit die beiden Umkehroperationen der Addition und der Multiplikation immer ausführbar sind, war der Bereich der ganzen Zahlen zu definieren, d.h. der Bereich der natürlichen Zahlen war um die Null und die negativen Zahlen zu erweitern. Erst im Jahr 1867 erfolgte diese Festlegung (Hankel'sches Permanenzprinzip). Die Subtraktion war damit unbeschränkt ausführbar und nimmt man die Brüche hinzu, so wird auch die Division immer möglich, wobei die Division durch Null nicht zulässig ist. Zu erweitern war der Begriff der Potenz (Hochzahl



IOANNIS CARAMVELIS
MATHESIS
BICEPS.
VETVS, ET NOVA.

I.	ARITHMETICA.	XXI.	LOGARITHMICA FLVENS.
II.	[illegible] ALGEBRA.	XXII.	LOGARITHMICA REFLVENS.
III.	GEOMETRIA GENERALIS.	XXIII.	COMBINATORIA.
IV.	COSMOGRAPHIA.	XXIV.	KYBEIA: DE LVDIS.
V.	GEODÆSIA.	XXV.	ARITHMOMANTICA.
VI.	GEOGRAPHIA.	XXVI.	TRIGONOMETR. GENERALIS.
VII.	CENTROSCOPIA.	XXVII.	TRIGONOMETR. RECVRRENS.
VIII.	OROMETRIA.	XXVIII.	TRIGONOM. ASTRONOMICA.
IX.	HYDROGRAPHIA.	XXIX.	ÆTHEREVS RECTANGVLVS.
X.	HISTIODROMICA.	XXX.	ΔΙΑΒΗΤΗΣ. CIRCINVS.
XI.	HYPOTHALATICA.	XXXI.	ARCHITECTVRA MILITARIS.
XII.	NECTICA.	XXXII.	MVSICA.
XIII.	NAVTICA SVBLVNARIS.	XXXIII.	METALLARIA.
XIV.	NAVTICA ÆTHEREA.	XXXIV.	PEDARSICA.
XV.	POTAMOGRAPHIA.	XXXV.	STATICA.
XVI.	HYDRAVLICA.	XXXVI.	HYDROSTATICA.
XVII.	AEROGRAPHIA.	XXXVII.	METEOROLOGIA.
XVIII.	ANEMOMETRIA.	XXXVIII.	SPHOERICÆ
XIX.	PTETICA.	XXXIX.	OSCILLATORIÆ } Planetarum Hypotheses.
XX.	SCIOGRAPHIA.	XL.	RECTILINEÆ

Abb. 12 Aus: Caramuel Lobkowitz, Juan: Ioannis Caramuelis Mathesis biceps vetus et nova. Campaniae 1670.

Null und negative Potenzen). Hermann Hankel (1839 - 1873) hat mit seinem Beitrag dieses Prinzip deutlich gemacht. In vielen Fällen war schon zuvor implizit danach gehandelt worden. Erinnert sei zum Beispiel an Michael Stifel, der in seiner *Arithmetica integra* von 1544 eine arithmetische Reihe einer geometrischen gegenüberstellte und dabei bestimmte Rechenoperationen ausführte.

Beispiele zur Überlegenheit des Stellenwertsystems

Im Dezimalsystem lässt sich mit nur drei Ziffern in der Anordnung $9^{9^9} = 9^{387420489}$ eine Zahl mit 369 693 100 Ziffern darstellen. In Exponentenschreibweise sieht das Ergebnis wie folgt aus:

4.28124773 E+369693099 (gerechnet auf einem modernen Mainframe IBM eServer zSeries 900).

Kurz schreibt man im Dezimalsystem zum Beispiel $2{,}6 \cdot 10^{19}$ km für die Entfernung des Andromedanebels von der Sonne (rund 26 Trillionen Kilometer).

Leider gehörten zum Alltagsleben schon einmal riesige Zahlen: es war die Zeit offener Inflationen. Ein typisches Beispiel ist die deutsche Inflation von 1923. Die nachfolgende Darstellung mit Nachweisen zum Notenumlauf und zum Preis des Dollars soll für sich sprechen. Die ausgewählten Daten stammen von Georg Obst (1873 - 1938). Danach belief sich der

391

Petersburg dadurch veranlasset, meine Theorie und den ganzen Prozeß der Rechnung algebraisch vorzustellen und seinen Aufsatz in dem Hamburgischen neuen Magazin von 1770. 8ten Band, Seite 1 bis 13 abdrucken zu lassen. Indessen, so gründlich und kurz auch diese Rechnung ist, so ist sie doch nur denen verständlich, welche die höhere Rechenkunst und die Algebra gelernt haben. Da es aber eine Hauptsache ist, daß alle diejenigen, die nur die gemeine Rechenkunst verstehen, und übrigens Personen von Nachdenken sind, die wahren Gründe dieser Berechnung kennen lernen, so will ich mich der algebraischen Sprache so viel möglich enthalten, und versuchen, ob ich nicht dem ohngeachtet die Vortheile bey dieser Berechnung auf eine vor gemeine Rechner faßliche Art herausbringen könne. Nur einige vorkommende Zeichen will ich vorher erklären. Der Punkt • bedeutet die Multiplikation, zwey Punkte : die Division, ein Strich - die Subtraktion, ein Creuz + die Addition, zwey Striche = die Gleichheit, und nun will ich zum Werke schreiten.

1. Es ist bekannt, daß schon längst viele berühmte Männer die Leibrenten Rechnung herausgebracht haben. Man hat nemlich aus fast unzähligen Erfahrungen be-

G.Mag. 2 Jahrg. 3 St. Ce stim-

Abb. 13 Abschrift aus: Göttingisches Magazin der Wissenschaften und Litteratur. 2.Jg., 1.St., 1781. Kritter J.A., S. 391.

Notenumlauf Mitte November 1923 auf den sagenhaften Betrag von 93 Trillionen Mark.

Die deutsche Inflation von 1918 - 1923

Nach Geld-, Bank- und Börsenwesen von Georg Obst

Zeitpunkt (Ende)		Notenumlauf in Mill. Mark	Preis des Dollars in Mark
Juli	1914	1 871	4,20
Dezember	1917	11 468	5,09
Dezember	1918	22 188	8,00
Dezember	1920	68 800	73,37
Dezember	1921	113 639	184,00
Dezember	1922	1 280 095	7 350,00
Juni	1923	17 291 061	154 500,00
15. Nov.	1923	92 844 720 743 031	4 200 000 000 000,00

Sehr große und sehr kleine Zahlen lassen sich übersichtlich mit Hilfe von Zehnerpotenzen darstellen (s. Abb. 14).

Ausgleichsrechnung

Die Ausgleichsrechnung wurde im Wesentlichen von Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) entwickelt. Nach Rudolf Zurmühl ist die von Gauß begründete Ausgleichsrechnung nach der *Methode der kleinsten Quadrate* eine der ältesten Anwendungen mathematischer Statistik. Diese Methode dient dazu, für mit Messfehlern behaftete Beobachtungswerte möglichst

Abb. 14 **Das internationale Einheitensystem** (SI)

Potenz		Zahl	Name	Zeichen	Größenbezeichnung
10^{24}	=	1 000 000 000 000 000 000 000 000	Yotta	Y	Quadrillion
10^{21}	=	1 000 000 000 000 000 000 000	Zetta	Z	Trilliarde
10^{18}	=	1 000 000 000 000 000 000	Exa	E	Trillion
10^{15}	=	1 000 000 000 000 000	Peta	P	Billiarde
10^{12}	=	1 000 000 000 000	Tera	T	Billion
10^{9}	=	1 000 000 000	Giga	G	Milliarde
10^{6}	=	1 000 000	Mega	M	Million
10^{3}	=	1 000	Kilo	k	Tausend
10^{2}	=	100	Hekto	h	Hundert
10^{1}	=	10	Deka	da	Zehn
		1			
10^{-1}	=	0,1	Dezi	d	Zehntel
10^{-2}	=	0,01	Zenti	c	Hundertstel
10^{-3}	=	0,001	Milli	m	Tausendstel
10^{-6}	=	0,000 001	Mikro	µ	Millionstel
10^{-9}	=	0,000 000 001	Nano	n	Milliardstel
10^{-12}	=	0,000 000 000 001	Piko	p	Billionstel
10^{-15}	=	0,000 000 000 000 001	Femto	f	Billiardstel
10^{-18}	=	0,000 000 000 000 000 001	Atto	a	Trillionstel
10^{-21}	=	0,000 000 000 000 000 000 001	Zepto	z	Trilliardstel
10^{-24}	=	0,000 000 000 000 000 000 000 001	Yocto	y	Quadrillionstel

gute Näherungen zu finden. Die Bestimmung von Ausgleichsgeraden und -kurven nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate hat in der Fehler- und Ausgleichsrechnung wichtige Anwendungen. Die Bedeutung dieser Methode wurde von Gauß klar erkannt. Dank dieser Methode gelang es ihm mit den wenigen Beobachtungen des Astronomen Piazzi die Ephemeride des kleinen Planeten Ceres zu berechnen. So erklärt sich, dass die genannte Methode häufig das Standardverfahren zur Bestimmung der Kurvenparameter war.

Wenn für eine anzupassende Kurve Hinweise für ein mögliches Modell fehlen, dann sind Splinefunktionen – ein verhältnismäßig junges Gebiet – hilfreich. Als Beginn der Entwicklung der Spline-Funktionen gilt eine im Jahr 1946 von Isaak Schoenberg (1903 - 1990) vorgestellte Arbeit, in der es u. a. heißt: „A spline is a simple mechanical device for drawing smooth curves." (Part A, Seite 67). Nach dem Lexikon der Mathematik traten glatte Splines erstmalig in einer Arbeit von L. Collatz und W. Quade 1938 im Zusammenhang mit der Behandlung von Fourierreihen auf.

Anwendung von Ausgleich-Splines

Um zu zeigen, wie gut eine Spline-Funktion die „wahre" Funktion wiedergibt, wurde eine Funktion verändert (oder wenn man will „verschmutzt"). Dazu wurden Nachkommastellen der Zahl π zur Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen z_i (Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1) verwendet. Diese dienten dann der Gewinnung von Messwerten $y_i = 15\,e^{-x_i^2} + z_i$, $i = 0, 1, \ldots, 100$. Abbildung 15 zeigt die Rohdaten und deren Ausgleichung.

Das Spline-Verfahren bietet die Möglichkeit, die Stärke des Ausgleichs zu steuern.

Vorzug interpolierender Spline-Funktionen

Die Überlegenheit der Spline-Interpolation zeigt sich an dem Beispiel in der Abbildung 16. Dort wurden die Quadratzahlen für die Zahlen von 1 bis 17 dargestellt, wobei der Wert für $x = 9$ auf 87 verändert wurde (statt 81), um zu zeigen, wie ein Interpolationspolynom und eine Spline-Interpolation darauf reagieren. Das Bild spricht für sich: die Splineinterpolation zeigt sich relativ „robust", während das Newton'sche Interpolationspolynom vom Grad 7 stark oszilliert.

In Abbildung 17 wurde die Deklination des Mondes vom Mai 2000 (Quelle: Kosmos Himmelsjahr 2000) für Zwecke der Interpolation benutzt. Von den 31 Daten für Mai wurden elf Knoten ausgewählt, und zwar: 1, 4, 7, …, 31). Damit soll gezeigt werden, wie eine Splineinterpolation und das Interpolationsverfahren nach Newton die fehlenden Werte schätzen. Die interpolierten Werte sind in beiden Fällen zufriedenstellend.

Abb. 15 **Glättung einer veränderten (verschmutzten) Funktion mittels eines Ausgleich-Spline**

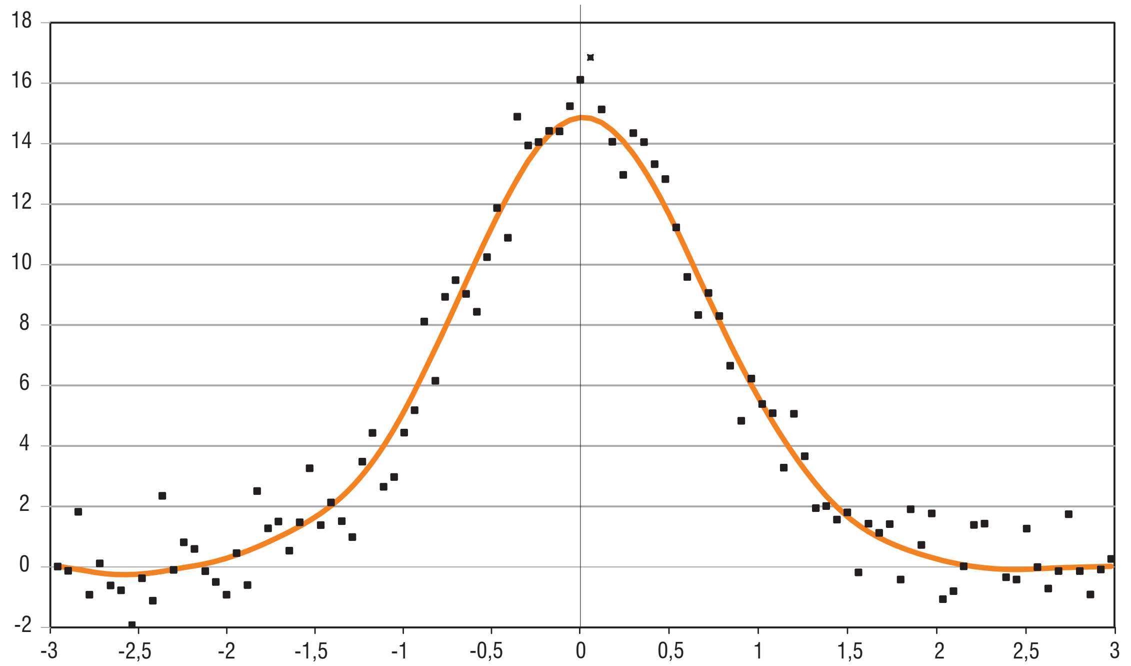
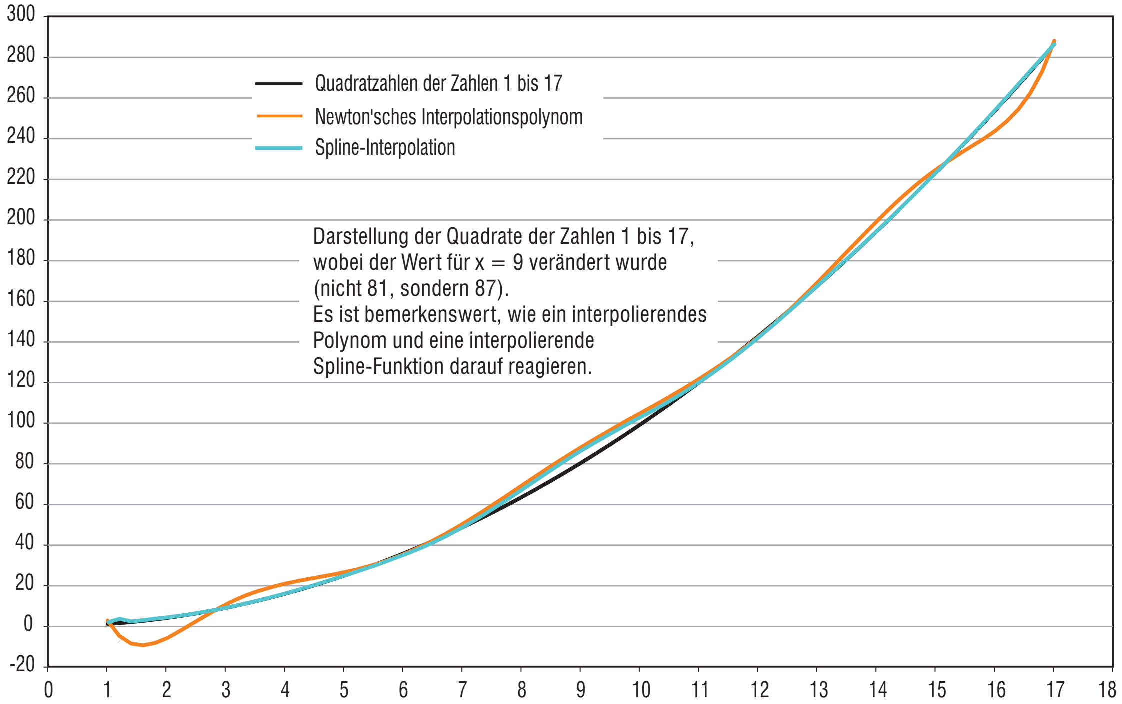


Abb. 16

Verhalten von Interpolationspolynom und Spline-Interpolation auf Störung



Glättung einer Zeitreihe mittels Spline-Funktionen

Glättende oder ausgleichende Spline-Funktionen lassen sich auch zur Darstellung der glatten Komponente einer Zeitreihe einsetzen. Abbildung 18 gibt hierfür ein Beispiel anhand von fiktiven Monatsdaten. Zusätzlich wurde in dieses Schaubild die Veränderung der glatten Komponente gegenüber dem jeweiligen Vorjahresmonat mit aufgenommen.

Im Heft 8/2007 der Zeitschrift „Bayern in Zahlen“ wurden nach dem Spline-Verfahren geglättete Werte für den Auftragseingang im Verarbeitenden Gewerbe Bayerns abgebildet.

Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde die Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten zum Teil noch abgelehnt. Inzwischen begegnet man bei der Sterblichkeitskurve dem Spiel des Zufalls durch Glättung der rohen einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten. Das Material für eine Sterbetafel ist mit zufälligen Abweichungen behaftet. Aufgrund der geringen Besetzungszahlen bei den niederen und hohen Altersjahren sind die rohen Werte dieser Altersjahre weniger zuverlässig als bei anderen Altersjahren.

Mitte des 20. Jahrhunderts hielt man es für vorteilhaft, die ganze Sterbetafel vom Alter 0 bis 100 nach derselben Methode ausgleichen zu können.[6] Dies war damals aber nicht durchführbar und so erfolgte die Ausgleichung der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten nach verschiedenartigen Verfahren. Ein Nachteil dabei ist, dass an den Endpunkten der Teilbereiche Bruchstellen entstehen. Zum Beispiel mussten bei der bayerischen Sterbetafel 1970/72 noch drei verschiedene Glättungsverfahren eingesetzt werden, die Altersjahre 1 bis 3 blieben unbehandelt. Für die Altersjahre 20 bis 80 (männliches Geschlecht) bzw. 16 bis 80 (weibliches Geschlecht) kam die 15-Punkte-Formel von Spencer $\frac{1}{320}$ (-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, 74, 67, …), die Faltung von vier Filtern, zum Einsatz. Dieser gleitende Durchschnitt stellt einen polynomialen Trend bis zur dritten Ordnung unverzerrt dar. Die Schätzung der glatten Komponente mit Hilfe gleitender Durchschnitte hat den Nachteil, dass am aktuellen Rand keine Schätzwerte berechnet werden können.*

Die bahnbrechende Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen ermöglicht die Anwendung des Spline-

* Im deutschen Sprachraum publizierte 1905 Altenburger seine mechanische Ausgleichung in den „Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privat-Versicherungs-Anstalten“, Neue Folge, 1. Band, 4. Heft, 1905, Seite 211 bis 282.

6 Die Nulljährigen sind als Sonderfall nicht in die Glättung einzubeziehen.

Abb. 17

Deklination des Mondes im Mai 2000

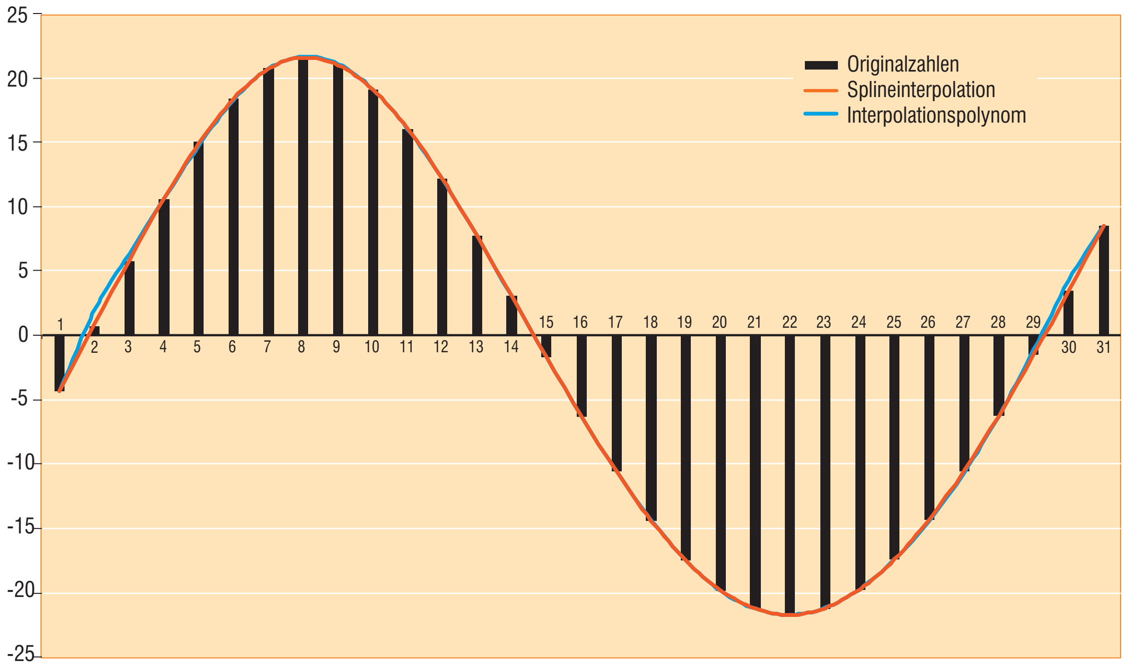
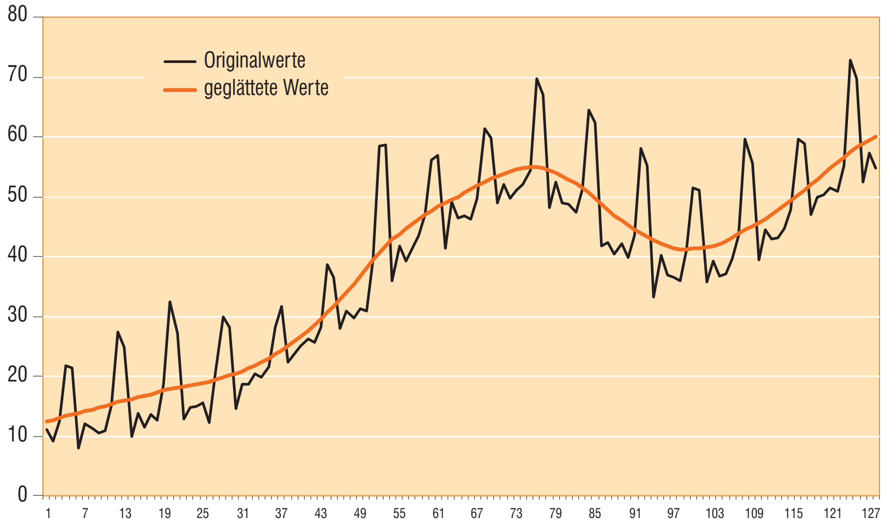


Abb. 18

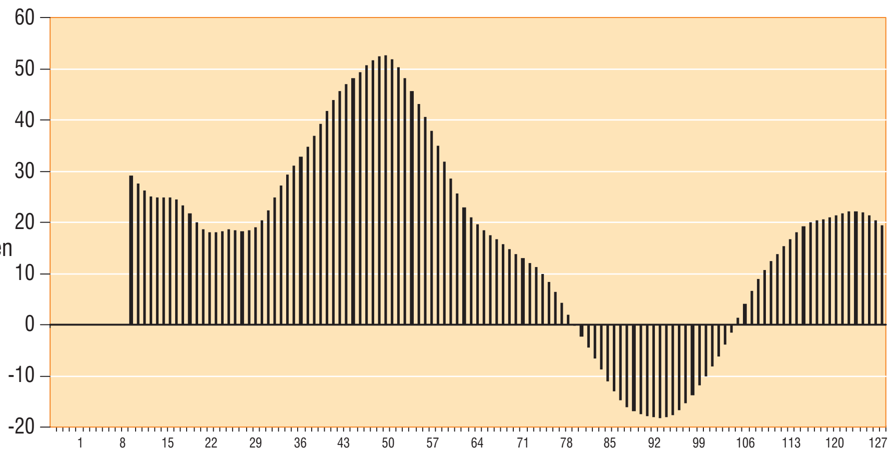
Fiktive Monatsdaten

Geglättete Werte können zum Beispiel bei Wirtschaftszeitreihen angewandt werden.



Veränderung der glatten Komponente gegenüber dem entsprechenden Vorjahresmonat in %

Anwendungsbeispiel: Verlauf der konjunkturellen Entwicklung anhand der glatten Komponente im Vorjahresvergleich.



verfahrens. Mit den heutigen Rechenmöglichkeiten ist die Rechenzeit zur Berechnung einer Splinefunktion mit etwa 100 Stützpunkten unwesentlich. So können die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten in „einem Guss" einer Glättung unterworfen werden.

An Ausgleichsverfahren werden zwei häufig sich widersprechende Forderungen gestellt. Einerseits bemüht man sich um einen glatten Verlauf der auszugleichenden Beobachtungsreihe, andererseits ist auf eine wirklichkeitsgetreue Wiedergabe der Beobachtungen zu achten. In der Lebensversicherung kann die Verwendung von rohen Sterbewahrscheinlichkeiten zu sprunghaften Prämien führen.

Bei der Erstellung der bayerischen Sterbetafeln 1986/88 und 1996/98 wurden bereits Spline-Funktionen (nach Christian H. Reinsch) eingesetzt. Siehe hierzu die Hefte 9/1991 und 8/2001 sowie 5/2002 der Zeitschrift „Bayern in Zahlen". Außerdem wurde die jährliche Entwicklung der mittleren Lebenserwartung eines bayerischen Neugeborenen (männlich bzw. weiblich) für die Jahre 1895 bis 1997 mittels einer interpolierenden Splinefunktion graphisch dargestellt (siehe Schaubild 3 in Heft 8/2001 von „Bayern in Zahlen" bzw. Seite 30 (aktualisiert).

Karl-August Schäffer machte auf die Vorzüge des Spline-Verfahrens bei der Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten aufmerksam (Schäffer, Karl-August: Ausgleichung durch Splinefunktionen und ihre Anwendung auf Sterbetafeln. Allgemeines Statistisches Archiv, Heft 14 (Splinefunktionen in der Statistik), S. 24 ff.

Um rasch einen ersten Eindruck über eine Sterblichkeitskurve zu gewinnen, kann auf das Angebot an mechanischen Ausgleichsformeln zur Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten von Walter Swoboda zurückgegriffen werden. Zum Beispiel liefert die von ihm entwickelte 21-Punkte-Formel geglättete Werte für die Altersjahre 11 bis 90. Am oberen Ende der Kurve kann man sich mit einer Extrapolation (basierend auf einer parabolischen Regression oder der Berechnung eines logistischen Trends) weiterhelfen. Am unteren Rand gestalten sich dagegen die Dinge allerdings nicht mehr so einfach. Dabei könnte die Ausgleichung mittels gleitender Durchschnitte erfolgen. Hingewiesen wird auf eine 9-Punkte-Formel, die Walter Swoboda in seinem Beitrag *Allgemeine bayerische Sterbetafel 1970/72* angab; s. „Zeitschrift des Bayerischen Statistischen Landesamts". 106. Jg. 1974, S. 2.

Literaturnachweis

Bauer, Ludwig: Hermanns „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht“. In: Friedrich Benedikt Wilhelm von Hermann (1795 - 1868): Ein Genie im Dienste der bayerischen Könige. Politik, Wirtschaft und Gesellschaft im Aufbruch. Hrsg. von Manfred Pix. München 1999. S. 497 ff.

Chuquet, Nicolas: Renaissance mathematician: a study with extensive transl. of Chuquet’s mathemat. manuscript completed in 1484 / ed. by Graham Flegg … Dordrecht u.a. 1985.

Cicero, Marcus Tullius: Tusculanae disputationes = Gespräche in Tusculum / M. Tullius Cicero. Übersetzt und hrsg. von Ernst Alfred Kirfel. Stuttgart 1997.

Euler, Leonhard: Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen (1) / aus dem Latein. übers. und mit Anm. und Zusätzen begleitet von Johann Andreas Christian Michelsen. Berlin 1788.

Gericke, Helmuth: Mathematik im Abendland: Von den römischen Feldvermessern bis zu Descartes. Berlin u. a. 1990.

Hanke, Georg: Philipp Apian. In: Porträts aus acht Jahrhunderten. Süddeutscher Verlag, München 1978. S. 69 (=Unbekanntes Bayern; 3).

Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/Main … 1991.

Kaunzner, Wolfgang: Zum Stand von Astronomie und Naturwissenschaften im Kloster Reichenbach. In: 875 Jahre Kloster Reichenbach am Regen. München 1993.

Kritter, J.A.: Aufklärung der Berechnungen der Wittwen- und Todtencassen für diejenigen, die sich in der Buchstabenrechnung nicht geübt haben. In: Göttingisches Magazin der Wissenschaften und Litteratur. 2. Jg.,1.St., 1781, S. 390 - 416.

Leibniz, Gottfried Wilhelm: Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik. Hrsg. von Eberhard Knobloch und J.-Matthias Graf von der Schulenburg. Berlin 2000.

Pölnitz, Götz von: Martin Behaim. In: Porträts aus acht Jahrhunderten. Süddeutscher Verlag. München 1978 (=Unbekanntes Bayern; 3).

Reinsch, Christian H.:
- Smoothing by Spline Functions. Numerische Mathematik. Bd. 10. 1967, p. 177 ff.
- Smoothing by Spline-Functions II. Numerische Mathematik. Bd. 16. 1971, p. 451 ff.

Schoenberg, Isaak Jakob: Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A – On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae. In: Quarterly of Applied Mathematics 4 (1946). Providence (Rhode Island) 1946, p. 45 - 99.

Schoenberg, Isaak Jakob: Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B – On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae. In: Quarterly of Applied Mathematics 4 (1946). Providence (Rhode Island) 1946. p. 112-141.

Swoboda, Walter: Gedanken zur Ausgleichung von Sterbetafeln. In: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 214/III, 1995. Nachdruck: Zeitschrift des Bayerischen Landesamts für Statistik und Datenverarbeitung, „Bayern in Zahlen“, 129 (52.) Jahrgang, 1998/3, S. 103 ff.

Stevin, Simon: La Pratique d’Arithmetique. In: L’Arithmetique. Leyden 1585.

Wolf, Rudolf: Geschichte der Astronomie. München 1877.

Rechengeräte – eine Skizze der Entwicklung

Erst eine fortgeschrittene Rechentechnik und die Verfügbarkeit geeigneter Rechenhilfen ermöglichten eine fundierte Bewertung von Leibrenten. Im Rahmen eines historischen Abrisses der Leibrenten wird der folgende Beitrag einem Streifzug in das Reich der Rechenknechte gewidmet. Die revolutionäre Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen machte die Anwendung von Spline-Funktionen zur Glättung der rohen einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten möglich. Damit wurde es praktikabel, eine Sterbetafel vom Alter 1 bis etwa 100 nach ein und derselben Methode auszugleichen. Die Spalte „Überlebende im Alter x“ einer Sterbetafel ist bekanntlich die Grundlage für die Berechnung von Versicherungsbarwerten. Die Technik des Rechnens machte im Abendland erst einen Fortschritt mit der Anwendung des heutzutage benutzten dezimalen Positions- oder Stellenwertsystems, das zur Verbreitung der schriftlichen Rechenkunst führte.

Vorbemerkungen

Durch die Fortschritte in der Mathematik verstärkte sich zu Beginn des 17. Jahrhunderts das Bemühen die Rechenarbeiten zu erleichtern. Vor allem in der Astronomie stieg der Rechenaufwand gewaltig an. Als zukunftsweisend erwies sich die Entdeckung der Logarithmen, die das Rechenverfahren Prosthaphaerese verdrängte.

Bald nach der Publizierung der ersten Logarithmen-Tafeln tauchten auch mechanische Hilfsmittel zum Rechnen auf. Vor Blaise Pascal (1623 - 1662), der lange als der Erfinder der Rechenmaschine galt, fertigte Wilhelm Schickard (1592 - 1635) eine Skizze für eine mechanische Rechenmaschine.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) entwarf eine Rechenmaschine für alle Grundrechnungsarten bis zu sechsstelligen Zahlen. Der Polyhistor Leibniz, der unabhängig von Newton die Infinitesimalrechnung entwickelte, verfasste auch zahlreiche Denkschriften zur Verbesserung der Krankheits- und Altersvorsorge, zur Errichtung von Renten- und Pensionskassen und zur Schaffung von Systemen der Lebensversicherung. Auf die theoretischen Vorteile des Dual- oder Zweiersystems (auch dyadisches oder binäres System genannt), das später von entscheidender Bedeutung für die Erfindung des Computers werden sollte, haben Juan Caramuel 1670 und Gottfried Wilhelm Leibniz 1679 hingewiesen. Es dauerte noch lange, bis die Logarithmen-Tafeln durch Rechenmaschinen verdrängt wurden.

Ein ähnliches Schicksal wurde auch dem Rechenschieber oder Rechenstab zuteil, der einmal ein unentbehrliches Hilfsmittel war. Bei einiger Übung kam man mit ihm rascher – wenn auch ungenauer – zu einem Ergebnis als mit der Logarithmentafel.

Definiert man den Begriff „Rechner“ im Sinne von Rechenmaschine, so fallen archaische Hilfsmittel wie der Abakus (Rechenbrett) ebenso darunter wie ein moderner Computer (zum Beispiel der Supercomputer „Blue Gene/L“ von IBM). Die Finanzbranche soll heutzutage mehr Rechner kaufen als fast jeder andere Wirtschaftszweig. Zur Herkunft der heutigen Bezeichnung Computer für eine Maschine zum Rechnen oder zur Datenverarbeitung: Komputus stand einst für die Berechnung der Kirchenfeste (computus ecclesiasticus).

Der Einsatz elektronischer Rechenanlagen brachte neue Disziplinen, vor allem in der angewandten Mathematik, hervor, die man sonst nicht entwickelt hätte, weil der Faktor Zeit im Wege stand. Im Folgenden werden ausgewählte Ereignisse in der Geschichte der Rechenmaschinen gestreift.

Rudolf Zurmühl schrieb in seinen „Bemerkungen zum Zahlenrechnen“ den Satz: „Auch das Zahlenrechnen ist eine Kunst, die gelernt sein will. Es erfordert ständige Sorgfalt und Konzentration, und auch dann lassen sich Rechenfehler nicht ausschalten.“; vgl. Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin 1965.

Der Rechenschieber – ein vormals unentbehrliches Werkzeug

Etwa 1624 erfand Edmund Gunter (1581 - 1626) den logarithmischen Rechenstab, die „Règle à calcul“ oder der „Sliding Rule." Seine Schrift *The description and use of the sector, cross-staff and other instruments* (London 1624) enthält auch die Beschreibung des früher unter dem Namen „Gunter's Line" bekannten Rechenstabes, vgl. Wolf, Rudolf: Geschichte der Astronomie. München 1877, S. 354. Für das Rechnen wurde ein Zirkel gebraucht. Diesen machte Edmund Wingate (1593 - 1656) durch Hinzufügen einer zweiten Skala entbehrlich. Zwei Schriften von Wingate sind: „Construction et usage de la regle de proportion" Paris 1624 und „Of natural and artificial arithmetic" London 1630. Erst 1850 bekam der Rechenschieber durch Amédée Mannheim das klassische Aussehen, dass er bis zu seinem Ende um 1980 beibehielt. Bis zum Erscheinen des elektronischen Taschenrechners war der Rechenschieber ein unentbehrliches Werkzeug für Berechnungen in vielen Bereichen.

Entwurf einer mechanischen Rechenmaschine zu Beginn des 17. Jahrhunderts

Es ist der Kepler-Kommission der bayerischen Akademie der Wissenschaften zu verdanken, dass man von der von Wilhelm Schickard entwickelten Rechenuhr etwas erfahren hat. Im Nachlass von Kepler fand man eine Skizze dieser Rechenmaschine, die einem Brief Schickards an Kepler aus dem Jahr

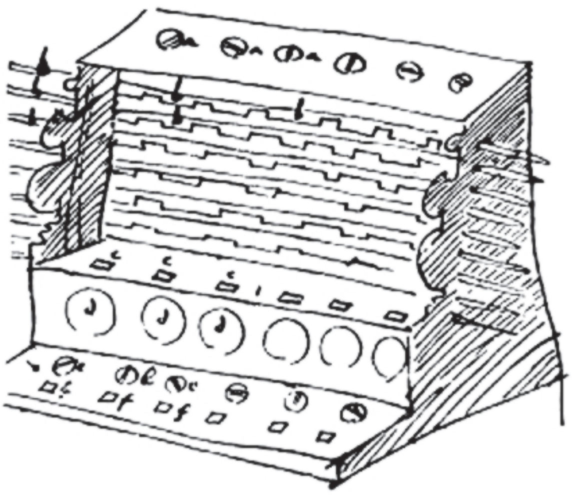


Abb. 1 Skizze der Rechenuhr von Wilhelm Schickard von 1623.
Aus: Kleine Enzyklopädie Mathematik. Frankfurt 1972.

1623 beilag (s. Abb. 1). Beide waren übrigens Schüler von Michael Maestlin. Blaise Pascal (1623 - 1662) soll bereits als 16-jähriger an der Erfindung einer Rechenmaschine gearbeitet haben. Die Idee dazu kam ihm, als er für seinen Vater, einem Steuerverwalter, Rechenarbeiten durchführen musste. 1642 konnte er seine mechanische Rechenmaschine vorführen.

Es dauerte bis 1694 ehe die von Gottfried Wilhelm Leibniz entworfene Rechenmaschine für alle Grundrechenarten fertig war (weil damals nur wenige Feinmechaniker verfügbar waren). Diese Rechenmaschine soll bis 1920 benutzbar gewesen sein, so Erich Hochstetter (1888 - 1968). Felix Klein (1849 - 1925) schrieb: „seine Maschine ist uns noch heute als eins der kostbarsten Besitztümer des Kästner-Museums in Hannover erhalten."

Zahlensysteme

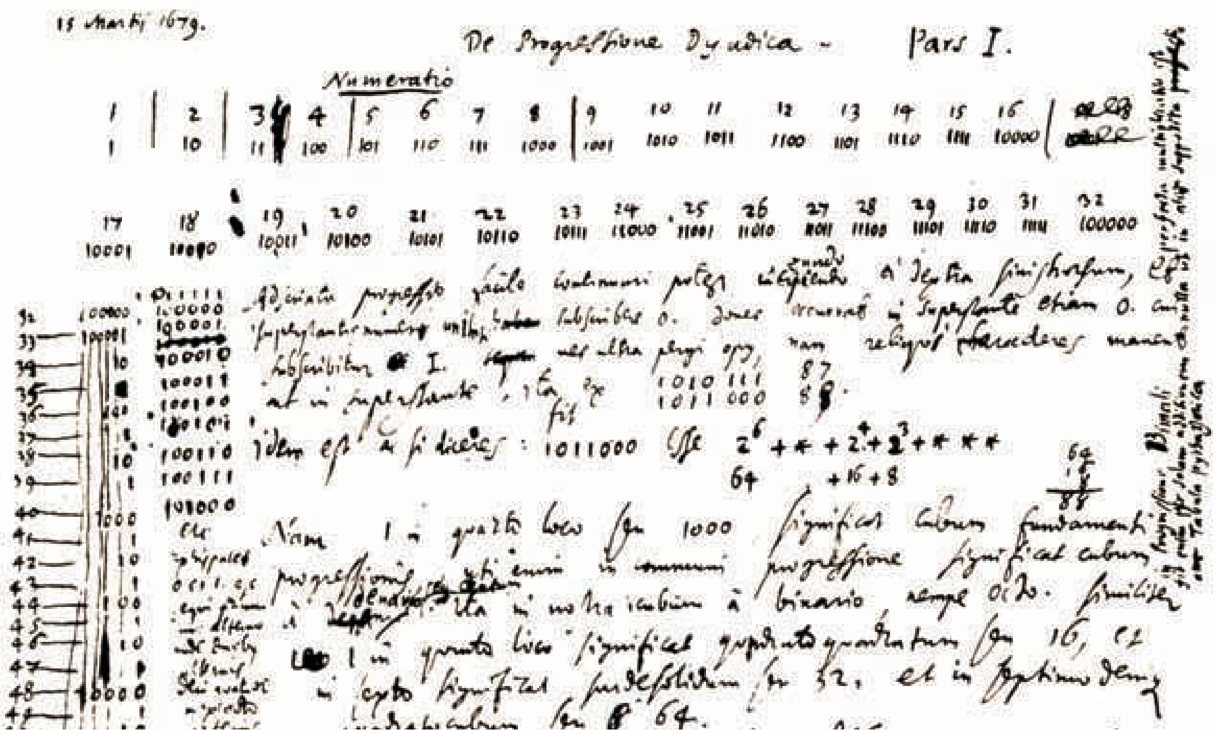
Leibniz beschäftigte noch ein weiterer Gedanke: Seine „Dyadik" oder binäre Arithmetik, d.h. die Darstellung aller Zahlen nur mit den Ziffern 0 und 1. Abbildung 2 zeigt die handschriftliche Aufzeichnung *De Progressione Dyadica* (Das dyadische Zahlensystem) vom 15. März 1679. Sein Aufsatz *Explication de l'Arithmétique Binaire* (Erklärung der binären Arithmetik) erschien 1703 in einer der angesehensten wissenschaftlichen Zeitschriften des 17. und 18. Jahrhunderts, der „Histoire de l'Académie Royale des Sciences", Année MDCCIII, in Paris. Der ausführliche Titel in das Deutsche übertragen von Dr. Rudolf Soellner, München: „Erklärung der Binären Arithmetik, die sich einzig der Zahl-Zeichen 0 und 1 bedient; mit Bemerkungen über ihre Nützlichkeit und über den Sinn, den sie den alten chinesischen Zeichen Fo-his verleiht. Von G. W. Leibniz"; vgl. *Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins* / Siemens AG. Berlin, München 1966.

In Vergessenheit scheint Caramuel geraten zu sein, der vor Leibniz über die binäre Darstellung von Zahlen publizierte.

Binäre Darstellung der Dezimalzahlen 0 bis 16
nach Caramuel und Leibniz

Dezimalzahl	Binär nach Caramuel (1670)	Binär nach Leibniz (1679)
0	0	0
1	a	1
2	a0	10
3	aa	11
4	a00	100
5	a0a	101
6	aa0	110
7	aaa	111
8	a000	1000
9	a00a	1001
10	a0a0	1010
11	a0aa	1011
12	aa00	1100
13	aa0a	1101
14	aaa0	1110
15	aaaa	1111
16	a0000	10000

Abbildung 3 zeigt einen Ausschnitt aus seinem Werk *Mathesis biceps* aus dem Jahr 1670.


15 Martii 1679.

De Progressione Dyadica – Pars I.

Numeratio

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111	100000

Abb. 2 De Progressione Dyadica (Das dyadische Zahlensystem) von Gottfried Wilhelm Leibniz (15. März 1679). Aus: Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins / Siemens AG. Berlin, München 1966.

Bedeutsam wurde das Zahlensystem mit der Grundzahl 2 später für die Computer. Nutzen lässt sich das Binärsystem auch für mathematische Spiele (genannt sei das Nim-Spiel).

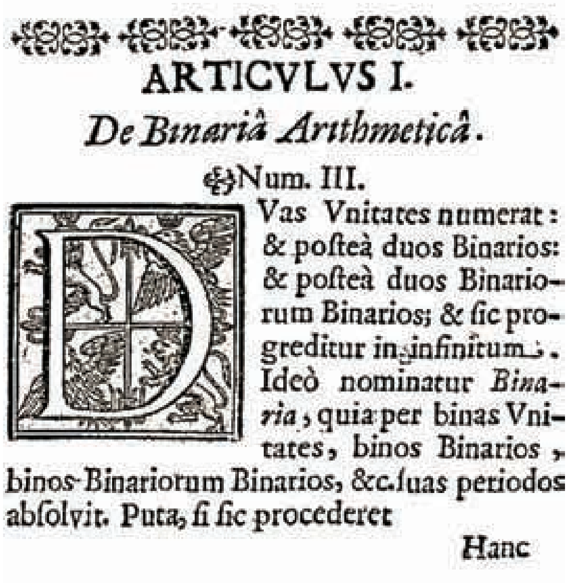
Im Rahmen der Nutzung von Computern sind folgende Zahlensysteme gebräuchlich: Dual-, Oktal-, Hexadezimalsystem. Die Namen der Zahlensysteme sind abgeleitet aus der Größe der Basis. Allgemein lässt sich jede zur Basis 10 gegebene Zahl N_{10} (dezimale Form) in ihre entsprechende Darstellung in einem anderen Zahlensystem umrechnen. Denkbar ist also auch ein System, dass neben den Ziffern 0 bis 9 alle Buchstaben des Alphabets einbezieht (36er System). Zwei Beispiele:
$999\,999\,999_{10} = 3B9AC9FF_{16} = GJDGXR_{36}$ und
$60\,380\,299\,597\,586_{10} = 36EA624F1712_{16} = LEIBRENTE_{36}$.
Augenfällig ist die Einsparung an Zeichen beim „36-System."

Beginn der Rechenmaschinenindustrie

Über den Entwicklungsstand der mechanischen Rechenmaschinen zu Beginn des 18. Jahrhunderts informiert die im Jahr 2002 herausgegebene Schrift *Meisterwerke aus dem Deutschen Museum Band IV*. Dort erfährt man auch etwas über die Rechenmaschine von Jacob Leupold.

Philipp Matthäus Hahn (1739 - 1790) entwickelte 1770 die erste verlässliche Vierspeziesrechenmaschine.

Der französische Versicherungsfachmann Charles Xavier Thomas (1785 - 1870) erhielt 1820 ein Patent auf seine „Arithmometer" genannte Rechenmaschine. Er gilt als der Begründer der Rechenmaschinenindustrie. Ned Chapin berichtete, dass Thomas die Idee von Leibniz erweiterte, indem er den Stufenzylinder mit einer Kurbel versah und eine ziemlich verlässliche


ARTICVLVS I.

De Binariâ Arithmeticâ.

Num. III.

DVas Vnitates numerat: & posteà duos Binarios: & posteà duos Binariorum Binarios; & sic progreditur in infinitum. Ideò nominatur Binaria, quia per binas Vnitates, binos Binarios, binos-Binariorum Binarios, &c. suas periodos absolvit. Puta, si sic procederet

Hanc

Abb. 3 Aus: Caramuel Lobkowitz, Juan:
Ioannis Caramuelis Mathesis Biceps. Vetus et Nova.
Campaniae 1670, XLV.

handkurbelbetriebene Vierspeziesrechenmaschine baute. „Diese Maschine wird oft der Großvater aller heutigen Tischrechenmaschinen genannt, weil sie in ganz Europa nachgebaut wurde und auch die weitere Entwicklung in den Vereinigten Staaten anregte und beeinflusste.“ heißt es in der deutschen Übersetzung von Ned Chapin's *Einführung in die elektronische Datenverarbeitung* von 1962.

In Deutschland wurde 1878 die fabrikmäßige Herstellung von Rechenmaschinen von Arthur Burkhardt in Glashütte (Sachsen) aufgenommen.

Nach 1900 eroberte die mechanische Rechenmaschine die Büros

Felix Klein (1849 - 1925) gibt einen Einblick in die Entwicklung der Rechenmaschinen in seiner Zeit: „Neuerdings breitet sich nämlich die Benutzung der *Rechenmaschine* mehr und mehr aus, und sie macht die Logarithmentafel überflüssig, da sie ein viel rascheres und sichereres direktes Multiplizieren gestattet. Freilich ist die Maschine heute noch so teuer, dass nur große Rechenbüros sie sich anschaffen können; aber wenn sie erst einmal wesentlich verbilligt sein wird, wird eine *neue Phase des numerischen Rechnens* beginnen“ (Klein, S 188).

Abb. 4 Die kleinste je gebaute mechanische Rechenmaschine, die ab 1954 hergestellt wurde: die „Curta“ (Type II – System Curt Herzstark).

Eine der verbreitetsten mechanischen Rechenmaschinen war die „Brunsviga“, die von den Brunsviga-Maschinenwerken Grimme, Natalis und Co. in Braunschweig vertrieben wurde. Ihre Konstruktion stammte ursprünglich von dem schwedischen Ingenieur Odhner, sie wurde aber wesentlich verbessert. Felix Klein erläutert diese Maschine in seinem Buch *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus I.* Vierte Auflage. Nachdruck 1968.

Curta (System Curt Herzstark) – eine Universalrechenmaschine im Taschenformat

Die kleinste je gebaute mechanische Rechenmaschine wurde ab 1948 in Lichtenstein hergestellt, die „Curta“. Der ab 1954 gebaute Typ II wog (ohne Dose) etwa 360 Gramm (siehe Abb. 4). Mit der Vier-Spezies-Rechenmaschine konnten Multiplikationen bis zu einem fünfzehnstelligen Ergebnis durchgeführt werden; so zum Beispiel die Multiplikation von 31 622 776 mit 31 622 776 = 999 999 961 946 176 (die Kurbel musste nur 22mal gedreht werden). Dividiert man 2721 durch 1001, so erhält man die Lösung 2,7182818 – eine gute Approximation für die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen. Bei der Division war der Quotient im achtstelligen Umdrehungszählwerk abzulesen. Die Anwendungsmöglichkeiten der „Curta“ bringt der Aufsatz *Programme für die Berechnung von Wurzeln, Polynomen und Potenzreihen mit Handrechenmaschinen* zum Ausdruck. Dieser Beitrag von Dr. H. Schilt aus Biel war auf die „Curta“ abgestellt, vgl. „Schweizerische Bauzeitung“. Sonderdruck aus dem 76. Jahrgang, Heft 21, 24. Mai 1958. Zwei Beispiele aus dem genannten Beitrag: Die Berechnung von $\sqrt[3]{786}$ und $e^{0,69}$. Im Jahr 1972 wurde die Produktion eingestellt (vom Modell II wurden etwa 60 000 Exemplare hergestellt). Mit dem Erscheinen des elektronischen Taschenrechners kam das Ende des Rechnens mit der Kurbel. Das von Curt Herzstark (1902 - 1988) geschaffene Wunderwerk der Mechanik ist heute ein begehrtes Sammlerstück, das Teil der Industriegeschichte ist. Im Jahr 2006 wurde diese Minirechenmaschine als Motiv einer Briefmarke des Fürstentums Liechtenstein gewählt. Das auf keine Stromquelle angewiesene Recheninstrument ist präziser als manch moderner Taschenrechner. Weltbekannte Hersteller mechanischer Rechenmaschinen waren z.B. Brunsviga, Facit, Odhner, Remington, Rheinmetall, Walther – Namen die heute in Bezug auf Rechenmaschinen gerade noch Sammlern etwas sagen.

Die Tischrechenmaschinen mit elektrischem Antrieb werden hier nicht behandelt.

HP-35: Ein Markstein in der Geschichte der Taschenrechner

Mit dem HP-35 (gebaut von 1972 - 1975) von Hewlett-Packard kam „ein wissenschaftlicher Taschenrechner, praktisch wie ein Rechenschieber aber mit der Genauigkeit und Schnelligkeit eines kleinen Computers“ auf den Markt, so die damalige Beschreibung. Das weniger als 300 Gramm schwere Gerät war mit 35 Tasten ausgestattet und arbeitete mit „Stack-Technik“ (4 Register). Werte wurden über den Rechenbereich von 200 Dekaden (10^{-99} bis 10^{99}) mit bis zu 10 Stellen angezeigt (siehe Abb. 5). Das Modell 35 war mit vier Registern plus einem Speicher für Konstanten ausgerüstet. Die „Stack“-Register wurden für einfache Rechnungen oder komplexe Probleme verwendet, bei denen mit Zwischenergebnissen gearbeitet wurde. Die Handhabung des Rechners zeigt Abbildung 6. Zwischenergebnisse brauchten weder aufgeschrieben noch wieder eingegeben zu werden.

Im *Erfahrungsbericht über den Taschenrechner Modell HP-35* wurde für die Aufgabe 2: Großkreis-Entfernung zwischen San Francisco und Miami die Rechenzeit mit dem HP-35 derjenigen mit dem Rechenschieber gegenübergestellt: 65 Sekunden mit 10stelliger Lösung / 5 Minuten mit 4stelliger Lösung. Der HP 35 war der erste Taschenrechner von Hewlett Packard mit RPN (Reverse Polish Notation). Diese Abkürzung steht für Umgekehrte Polnische Notation. Jan Lukasiewicz entwickelte 1920 die Polnische Notation als Schreibweise für mathematische Ausdrücke ohne Verwendung von Klammern. Die Inverse Polnische Notation erlangte Relevanz in der Rechentechnik. Durch den HP-35 wurden Logarithmen- und trigonometrische Tafeln überflüssig. Ein ähnliches Schicksal wurde dem Rechenschieber zuteil (s. Abb. 7).

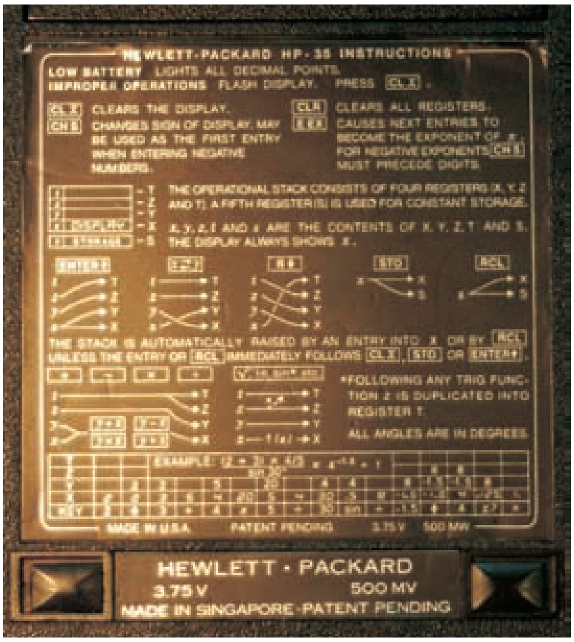


Abb. 6 Dieses Bild zeigt die Eingabe von Rechenaufgaben in den Rechner HP 35, der nach einem Prinzip arbeitete, das als umgekehrte polnische Notation (Lukasiewicz) bekannt ist.

Der erste programmierbare Taschenrechner der Welt, der HP-65, wurde bereits 1974 präsentiert. Er bot außerdem die Mög-

Abb. 5 Der erste technisch-wissenschaftliche Taschenrechner von Hewlett-Packard: das Modell HP 35 (ab 1972 hergestellt).

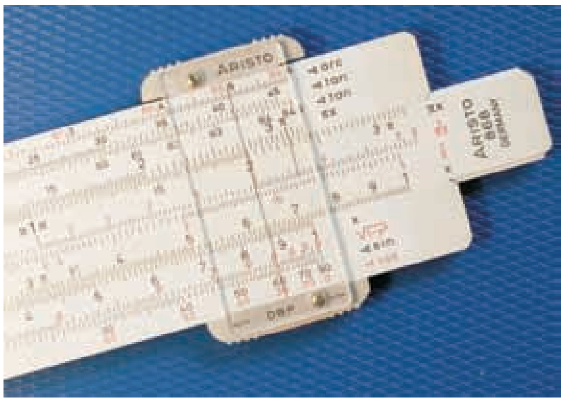


Abb. 7 Logarithmischer Rechenschieber mit Läufer und Zunge: Aristo-Studio, Modell Nr. 868 (um 1965 hergestellt).

lichkeit, Programme und Daten auf Magnetkarten zu speichern.

Mit dem 1979 eingeführten Taschenrechner HP-41C war es z. B. möglich, die Lösungen für Gleichungssysteme mit bis zu 14 Unbekannten zu bestimmen (Gauß'sches Eliminationsverfahren mit modifiziertem Pivot-Verfahren).
Im Verborgenen wachsende Rundungsfehler konnten die Genauigkeit numerischer Rechnungen beeinträchtigen. So zum Beispiel bei bestimmten Zinsrechnungen. Abhilfe konnte dadurch geschaffen werden, dass man den Logarithmus in einer geeigneten Weise einsetzte.
Ausgespart wird die Geschichte der Personal Computer (nur soviel: den Anfang machten 1974 Ed Roberts und Eddie Curry mit einem Computer-Bausatz; ein Personal-Computer kam 1977 auf den Markt: der von Steven Paul Jobs und Stephen Wozniak entwickelte Apple I).
Nach diesem Streifzug in das Reich der Handrechenmaschinen folgt ein Abstecher in die Anfangszeit der Rechenanlagen im 19. Jahrhundert.

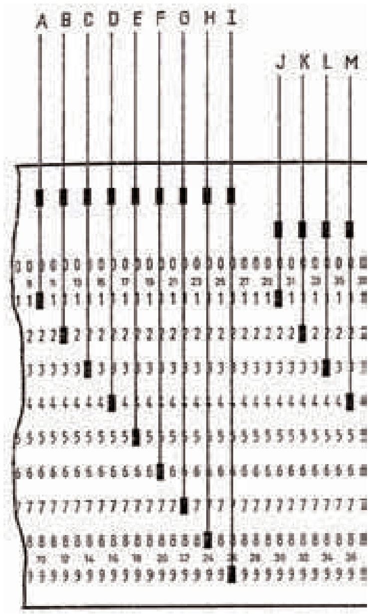
Der postume Triumph Babbage's

Bedeutende Arbeiten auf dem Gebiet der Rechenmaschinen leistete Charles Babbage (1792 - 1871). Er baute eine sogenannte „difference engine", die der Erstellung von Tabellenwerken (z.B. Logarithmen und dritte Potenzen) dienen sollte. Außerdem hatte er einen Entwurf (1833) für eine „analytische Maschine", die schon die Grundeinheiten eines modernen Computers zeigte: Rechenwerk, Zahlenspeicher, Lochkartensteuereinheit (die er vom automatischen Webstuhl übernahm), Dateneingabegerät für Zahlen und Programm sowie eine Datenausgabeeinheit mit Druckwerk. Seine Pläne scheiterten jedoch an dem noch unzureichenden Stand der damaligen Technik.

Der postume Triumph des englischen Mathematikers Charles Babbage blieb nicht aus: „Angetrieben von einer Handkurbel, rechnete am 29. November 1991 eine drei Tonnen schwere Maschine aus rund 4 000 bronzenen und gusseisernen Teilen x^7 für alle x von 1 bis 100 aus.", vgl. *Denkendes Räderwerk*. In: „Spektrum der Wissenschaft", März 1993. Die nach den Originalzeichnungen gebaute „Difference Engine No. 2" lieferte fehlerlose Resultate.

Datenverarbeitung: Lochkarte als Datenträger

Die von Hermann Hollerith (1860 - 1929) entwickelte Lochkartentechnik, die bei der 11. amerikanischen Volkszählung im Jahr 1890 erfolgreich zum Einsatz kam, leitete eine Epoche von elektromechanischen Rechenmaschinen ein. „Dieser Zensus war gleichsam die Killer-Applikation der Maschine." (Bernhard J. Dotzler in der F.A.Z. vom 10. März 2001: *Holleriths Killer-Applikation: Der Erfinder der Schaltungstechnik hatte sich nicht vertippt: Seine Lochkarten-Zählmaschine war Saat und Staat zugleich).* Dotzler erläutert: „Eine ‚Killer-Applikation' nämlich heißt im Computerjargon ein Programm, dessen Markterfolg so durchschlagend ist, dass Konkurrenzprodukte so gut wie chancenlos danebenstehen." Die Lochkartenmaschinen führten einfache Rechnungen (z.B. Summenbildungen) mit in Karten gestanzten Zahlen aus.



Es ist bemerkenswert, dass Jahre hindurch Lochkartenmaschinen ausschließlich nur für statistische Arbeiten verwendet wurden. Die Tabelliermaschine nannte man die „Königin" unter den Lochkartenmaschinen; sie konnte lesen, rechnen, schreiben und noch einiges mehr. Die Buchstabenlochung im IBM-System wurde übrigens erst 1935 eingeführt. Bis zum Aufkommen magnetischer Aufzeichnungsverfahren war die Lochkarte der gebräuchlichste Datenträger.

Für die manuelle Aufbereitung von Daten gab es im Wesentlichen zwei Verfahren: Das Legeverfahren und das Listenverfahren.

Computerpioniere

Als Erfinder der elektronischen Datenverarbeitungsanlage werden Konrad Zuse (1910 - 1995) und Howard Hathaway Aiken (1900 - 1973) angesehen. Den ersten voll funktionsfähigen Computer der Welt mit Programmsteuerung, den Zuse Z 3, stellte Konrad Zuse 1941 vor.
Howard Hathaway Aiken fertigte in Zusammenarbeit mit der IBM Corporation 1944 den ersten programmgesteuerten Computer Amerikas, den MARK I. Aiken kannte im Gegensatz zu Zuse die Arbeiten von Babbage.
Der geniale Mathematiker John von Neumann (1903 - 1957) schlug 1946 den Bau speicherprogrammierter Rechenanlagen vor. Angestrebt wurde eine flexiblere Program-

mierung, Konrad Zuse hatte sich damit schon befasst („Plankalkül“). Außerdem gewann die Forderung nach schnelleren Lösungswegen eine immer wichtigere Bedeutung.

Die erste vollelektronische Rechenanlage der Welt entstand in den USA, es war ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Automatic Computer). Diese von John P. Eckert (1919 - 1995) und John W. Mauchly (1907 - 1980) entwickelte Rechenanlage erregte Aufsehen durch hohe Arbeitsgeschwindigkeit (Multiplizieren zweier 10stelliger Zahlen in 1/350 Sekunden oder 2,8 Millisekunden) und großen Aufwand (rund 18 000 Elektronenröhren). Später wurde bekannt, dass Mauchly Konzepte von John V. Atanasoff (1903 - 1995) kannte.

Der Computer ENIAC brauchte 1949 noch 70 Stunden um 2 037 Stellen der Zahl π zu berechnen (Reitwieser et. al.). Dabei kam die arctan-Formel von John Machin (1680 - 1752) zum Einsatz. Machin berechnete 1706 einhundert Nachkommastellen von π.

Am 29. Juli 1961 berechnete eine IBM 7090 im Dualsystem schon 100 265 Dezimalstellen der Zahl π. Das Programm erstellten Daniel Shanks und John W. Wrench jun. Angewandt wurden arctan-Formeln (eine von C. Störmer und eine von C.F. Gauß). Nach der Formel von Störmer (1896) wurden 8 Stunden und 43 Minuten benötigt, nach der von Gauß 4 Stunden und 22 Minuten. Die Übertragung in das Dezimalsystem dauerte 42 Minuten. Das Berechnen von π bis auf einige tausend Stellen nach dem Komma wurde als Testprogramm für neue Computer verwendet. Im Juli 1997 wurden für die Berechnung von 51,5 Milliarden Nachkommastellen der Zahl π (Yasumasa Kanada) etwa 29 Stunden benötigt – eine erstaunliche Entwicklung

Isaak Newton berechnete übrigens 1665 π auf 15 Stellen (13 korrekt) und kommentierte dies so: „Ich schäme mich, wenn ich Ihnen sage, auf wieviele Stellen ich diese Berechnung ausführte, weil ich gerade nichts anderes zu tun hatte.“ (zitiert nach Jörg Arndt, Christoph Haenel: Pi: Algorithmen, Computer, Arithmetik). Ist das Rechnen auf viele Stellen nur Spielerei? Wie auch immer: Die Tauglichkeit der Nachkommastellen von Pi als „Zufallszahlen“ wurde bereits zum Ausdruck gebracht (siehe *Ein Blick in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung,* S. 79).

Die weiteren Entwicklungsstufen der Computertechnik sollen hier nicht nachgezeichnet werden. Zur historischen Entwicklung der großrechnerbasierten Datenverarbeitung wird auf den Aufsatz *Das IBM-Großrechner-Betriebssystem z/OS* von Christian Stangl hingewiesen, siehe Heft 12/2004 und 1/2005 der Zeitschrift „Bayern in Zahlen.“

Bemerkt sei noch, dass das Dualsystem ein wesentliches Element der Computertechnik wurde. Heute wird der Computer nicht mehr nur als Rechner, sondern in vielfältiger Form bis hin zum Erschaffer virtueller Welten und Personen, sog. Avatare, benutzt. Zur Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen bemerkte Ned Chapin: „Es ist merkwürdig genug, dass die Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen von etwas abhing, das doch in scheinbar keinerlei Zusammenhang mit ihnen stand – vom *Radar*.“

Zum Nutzen elektronischer Rechenmaschinen

René Descartes (1596 - 1650) legte 1637 die Grundlagen der analytischen Geometrie dar (anonym): *Discours de la Méthode* (Abhandlung über die Methode) – „La Géométrie“. So war der Weg bereitet, Gleichungen bildhaft zu beschreiben. Diese Gedanken konnten allerdings erst dann in die Praxis umgesetzt werden, als außer Lineal und Zirkel ein weiteres Werkzeug zur Verfügung stand: der Computer.

Die Erfolge der Raumfahrt gäbe es ohne die elektronische Datenverarbeitung nicht. Die gewaltige Entwicklung der Leistungsfähigkeit programmgesteuerter elektronischer Rechenanlagen gab der Numerischen Mathematik einen beachtlichen Schub. Hierzu zählen auch die Spline-Funktionen, die sich zum Beispiel zur Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten eignen. Ein Ausgleich-Spline lässt sich auch zur Darstellung der glatten Komponente einer Zeitreihe einsetzen.

Beim Beweis des Vierfarbenproblems („four colors suffice“) war der Einsatz des Computers von Bedeutung. Ende 2003 wurde die Lösung eines auf Archimedes (287 - 212 v. Chr.) zurückgehenden Rätsels mit dem Computer gelöst: Das sog. „Stomachion“. Hierüber berichtete die SZ in ihrer Ausgabe vom 19. Dezember 2003 unter der Überschrift „17 000 Quadrate aus 14 Teilchen“.

Erwähnt sei der Vortrag im Einsteinjahr 2005 von Prof. Dr. Hanns Ruder (Theoretische Astrophysik, Universität Tübingen) in Berlin mit dem Titel *Was auch Einstein sicher gern gesehen hätte*. Im Einladungstext hieß es: „Da wir nicht täglich mit >fast Lichtgeschwindigkeit< zur Arbeit fahren, können wir leider keinen intuitiven Zugang zur Relativitätstheorie von

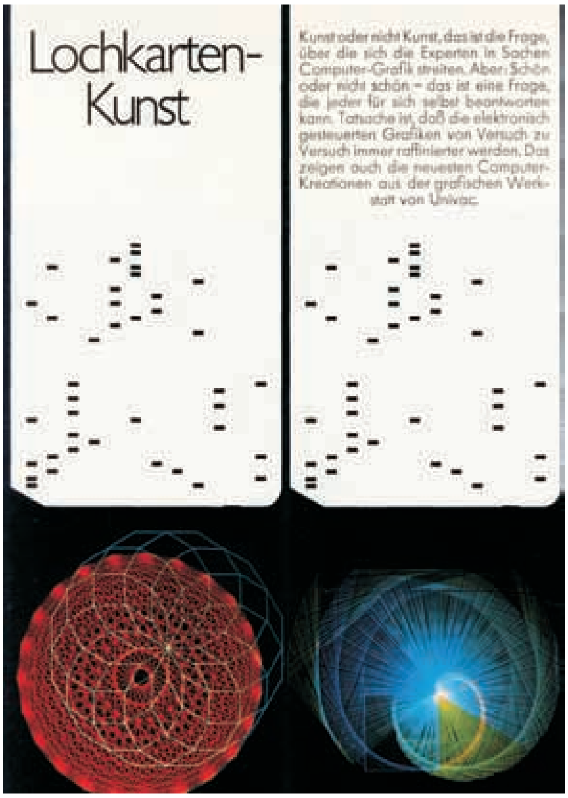


Abb. 8 Computer-Kreationen aus der grafischen Werkstatt von Univac.
Aus: Capital 5/70

Einstein entwickeln. Dank moderner Rechner und Computergraphik ist es aber heute möglich, die relativistischen Effekte zu visualisieren. Wir ‚verstehen' sie dadurch zwar noch lange nicht, aber wir sehen sie wenigstens!"

Die USA gründeten 1957 ARPA (Advanced Research Projects Agency). Diese Institution befasste sich mit der Vernetzung unterschiedlicher Computersysteme und schuf das ARPAnet, den Vorläufer des Internets. Das Konzept für das World Wide Web (WWW) entwarf 1989 Tim Berners-Lee, Forscher am Kernforschungszentrum CERN in Genf, um die Fülle von Informationen besser nutzen zu können.

Zur Kennzeichnung der Beziehungen zwischen Menschen und Computern kam der Begriff „Cyber" auf. Die Namensgebung geht auf Norbert Wiener (1894 - 1964) zurück. Im Jahr 1948 erschien sein Werk *Cybernetics or control and communication in the animal and the machine*. Die sprachliche Wurzel findet sich im griechischen Wort κυβερνήτης (Steuermann); gubernator ist das lateinische Wort für Steuermann.

Testen von DV-Programmen

Die Arbeitsanweisungen für den Computer heißen Programme. Der Aufwand zum Testen der Programme darf nicht

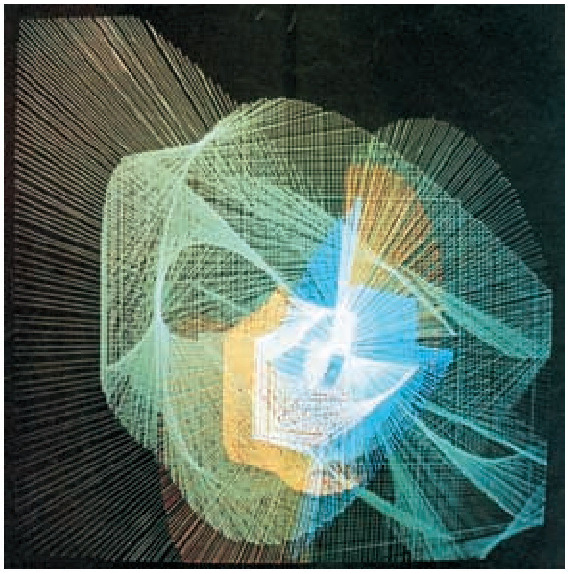


Abb. 9 Computer-Kreationen aus der grafischen Werkstatt von Univac.
Aus: Capital 5/70

unterschätzt werden. Dennoch können beim Testen der Programme Fehler unentdeckt bleiben. Da Hardwarefehler so gut wie ausgeschlossen sind, handelt es sich meist um Programmierfehler. Diese können sich gewaltig auswirken. Der Verlust der amerikanischen Raumsonde Mariner 1 im Jahr 1962 beruhte auf einer unzutreffenden Anweisung in einem FORTRAN-Programm (Punkt statt Komma).

Computer-Graphik

Die Anfänge der Computer-Graphik liegen in den 50er Jahren des vorigen Jahrhunderts. Die Pioniere konnten für ihre Arbeiten die Computer nur nachts nutzen; die Rechenzeit war begehrt und kostbar.

Mit „Lochkarten-Kunst" wurden 1970 die neuesten Computer-Kreationen aus der grafischen Werkstatt von Univac betitelt (Capital 5/70). In Sachen Computer-Grafik diskutierte man die Frage: Kunst oder nicht Kunst. Die Abbildungen 8 und 9 stammen aus dem angesprochenen Beitrag.

tui digiti (deine Rechenfertigkeit)

Es ist bemerkenswert, dass die moderne Datenverarbeitung etymologisch an das Rechnen mit den Fingern anknüpft. Man denke an die Digitalrechenanlage (digital computer). Nach Brockhaus heißt digital [von lat. digitus „Finger"], 1) mit den Fingern; in Datenverarbeitung, Messtechnik u. dgl.: zahlenmäßig, quantitativ (Gegensatz: analog). 2) ziffernmäßig.

Dies erinnert an den lateinischen Ausdruck „tui digiti" (deine

Rechenfertigkeit), siehe *Der kleine Stowasser*. Digit verbirgt sich auch hinter der Bezeichnung Bit, die Abkürzung des englischen „binary digit“. Ein Bit kann zwei Werte, 0 oder 1, annehmen, wobei acht Bits ein Byte bilden.

Technische Meilensteine

Einen ungefähren Überblick über die technische Entwicklung seit dem Ende des 19. Jahrhunderts vermittelt die nachfolgende Übersicht, die dem Bulletin der Credit Suisse entnommen wurde. Diese Darstellung bezieht sich zwar auf das Bankwesen, sie dürfte dennoch auf andere Bereiche übertragbar sein.

Technische Meilensteine im Banking

Die Liste zeigt, in welchen Jahren die Innovationen bei der Credit Suisse erstmals eingesetzt wurden:

1880	Telefon
1890	Schreibmaschine
1904	Rechenmaschine
1920	Buchungsmaschine
1935	Fernschreiber
1948	Lochkartenmaschine
1956	Rohrpost
1962	Magnetbandorientierte Datenverarbeitungsanlage (1. Computergeneration)
1962	Erste Autobank der Schweiz
1967	IBM/360-40 (2. Computergeneration)
1968	Bancomat
1972	Zentrales Rechenzentrum
1974	IBM/370-168 (3. Computergeneration)
1985	Personal Computer (PC)
1993	Phone Banking (Direct Phone)
1997	Internet Banking (Direct Net)
1999	Online Brokerage (youtrade, später Direct Net)
2000	Mobile Banking via Handhelds und WAP-Handy

Aus dem Bulletin der Credit Suisse (2.05 Seite 15)

Sonstige Rechenhilfsmittel: Zahlentafeln, Nomographie und Apparate

Mathematische Methoden werden in vielen Bereichen zur Gewinnung numerischer Ergebnisse angewendet. Hierfür kommen graphische, instrumentelle und vor allem numerische Methoden zum Einsatz.

Eine lange Tradition haben die so genannten Zahlentafeln. Häufig benötigte Zahlen hat man einmal berechnet und dann in Tabellen festgehalten. Dabei wird man weniger an den Kalender denken, der letztlich auch das Ergebnis einer Berechnung ist. Als Zahlentafeln gelten zum Beispiel: Tafeln der Quadratzahlen, Quadratwurzeln, Potenzen von 2, Logarithmen, Fakultäten oder Binomialkoeffizienten. In diesem Zusammenhang sei aber auch die „Gehstunden-Tabelle der Oberdeutschen Jesuitenprovinz“ (Intervalla Horaria Domiciliorum Provinciæ Germaniæ Superioris Societatis IESU) aus dem Jahr 1685 genannt (Bayer. Nationalmuseum, Inv. Nr. R 7589).

Den Babyloniern waren übrigens schon Tabellen mit Quadratzahlen und Potenzen vertraut. Zinseszinsaufgaben lösten sie mit Hilfe von Zweierpotenzen.

Lange vor der Zeit der elektronischen Rechner wurde das Radizieren (Wurzelziehen) vielfach mit Rechenschieber oder Logarithmentafel durchgeführt. Für das Radizieren konnten aber auch die Tafeln der Quadratzahlen herangezogen werden. Zu den Zahlentafeln können auch jene Tafeln gerechnet werden, denen man beispielsweise den Barwert $\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$ einer nachschüssigen Rente in Höhe von „1“ entnehmen kann. So kann man zum Beispiel für $n = 15$ und $p = 3\,\%$ den Barwert 11,93794 ablesen. Genannt sei auch eine Tabelle mit Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerten, um etwa für ein Kaufgeschäft auf der Basis einer Leibrente den gesuchten Barwert zu finden. Die nötigen Ausgangsdaten sind: Der Kaufpreis, das Lebensalter des künftigen Rentenbeziehers und ein zu wählender Zinssatz. Erinnert sei an die Tabellen mit diskontierten Zahlen von Simon Stevin aus dem Jahr 1585.

Manches Rechenergebnis lässt sich auch auf graphischem Wege finden, so zum Beispiel das geometrische Mittel. Eine Grafik dient dabei als Nomogramm für die Quadratwurzel aus einem Produkt $c = \sqrt{ab}$.

Unter den Rechenhilfsmitteln nehmen die Nomogramme eine besondere Stellung ein. Sie lassen sich in fast allen technischen Bereichen bei wiederkehrenden Rechnungen nutzen. Als Nomogramm bezeichnet man schon die graphische Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen zwei Variablen. Sie sind graphische Tabellen, in denen gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen veränderlichen Größen bildlich dargestellt werden. Jedes Nomogramm ist nur für einen bestimmten Formeltyp anwendbar.

Zu den Rechenhilfen zählen auch die so genannten Rechenscheiben, die für einen bestimmten Zweck konstruiert wurden (z.B. Benzinverbrauch, Währungsumrechnung). Im Beitrag *Die Vorausberechnung der Gezeiten* des Deutschen Schiffahrtsmuseums wird der älteste deutsche Gezeitenrechner, eine Papierrechenscheibe, aus dem ältesten deutschen Navigationslehrbuch von Jacob Alday aus dem Jahr 1578 erwähnt. Allerdings wird darauf hingewiesen, dass von einer wirklichen Vorausberechnung nicht die Rede sein kann.

Die harmonische Analyse ist schon lange ein wichtiges Werkzeug in Wissenschaft und Technik. Sie dient der Bestimmung der Fourier-Koeffizienten. Man verwendet sie zur Analyse periodischer Vorgänge. Der Rechenaufwand ist beträchtlich, selbst bei der Verwendung spezieller Rechenschemata. Der enorme Zeitaufwand für die Fourieranalyse führte zur Entwicklung mechanischer Geräte. Schon vor dem Aufkommen der Elektronik in Wissenschaft und Technik wurden Harmonische Analysatoren, das sind Apparate zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten, eingesetzt. Der erste Entwurf eines Fourier-Analysators stammt aus dem Jahr 1856. Heutzutage werden für die Approximation periodischer Funktionen verschiedene Verfahren herangezogen, darunter die so genannte „Schnelle Fouriertransformation“ oder „Fast Fourier Transform“ (FFT), eine effektive Berechnung der diskreten Fourier-Koeffizienten.

Eine besondere Spezies von Analogrechnern waren einst die Gezeitenrechenmaschinen, um Ebbe und Flut im voraus berechnen zu können. Die Vorausberechnung der Gezeiten gilt als sehr komplex. Im genannten Beitrag des Deutschen Schiffahrtsmuseums wird darauf hingewiesen, dass die Gezeiten auch heute zu den schwierigsten Problemen der physikalischen Geographie zählen und die mit ihnen befassten Forschungsinstitutionen werden zu den anspruchsvollsten Supercomputer-Nutzern gerechnet.

Erinnert sei an Rudolf Mehmke (1857 - 1944), der in Stuttgart einen Apparat zur numerischen Auflösung von Gleichungen konstruierte (Felix Klein, S. 102).

Rechenkniffe

Zu guter Letzt noch eine Anmerkung: Auch im Zeitalter leistungsfähiger Computer sind effiziente Algorithmen essentiell. Dies zeigen zum Beispiel die Berechnung der Zahl Pi auf möglichst viele Nachkommastellen oder der Primzahltest auf beeindruckende Weise. So lautete es im Vorspann zum Beitrag *Primzahlen im Schnelltest* von Carl Pomerance: „Primzahlen oder nicht? Das herauszufinden, hätte einen Großcomputer bei Zahlen mit mehr als zweihundert Stellen bislang für eine Milliarde Jahre beschäftigt. Mit Rechentricks schafft er es heute in zehn Minuten.“, vgl. „Spektrum der Wissenschaft“, Februar 1983.

Rechenkontrollen

Schließlich sollen noch die Rechenkontrollen angesprochen werden. Als Beispiel sei die Charlier-Probe genannt. Einzelheiten hierzu finden sich bei Moroney, M. J.: Einführung in die Statistik Teil I: Grundlagen und allgemeiner Teil. München und Wien 1970.

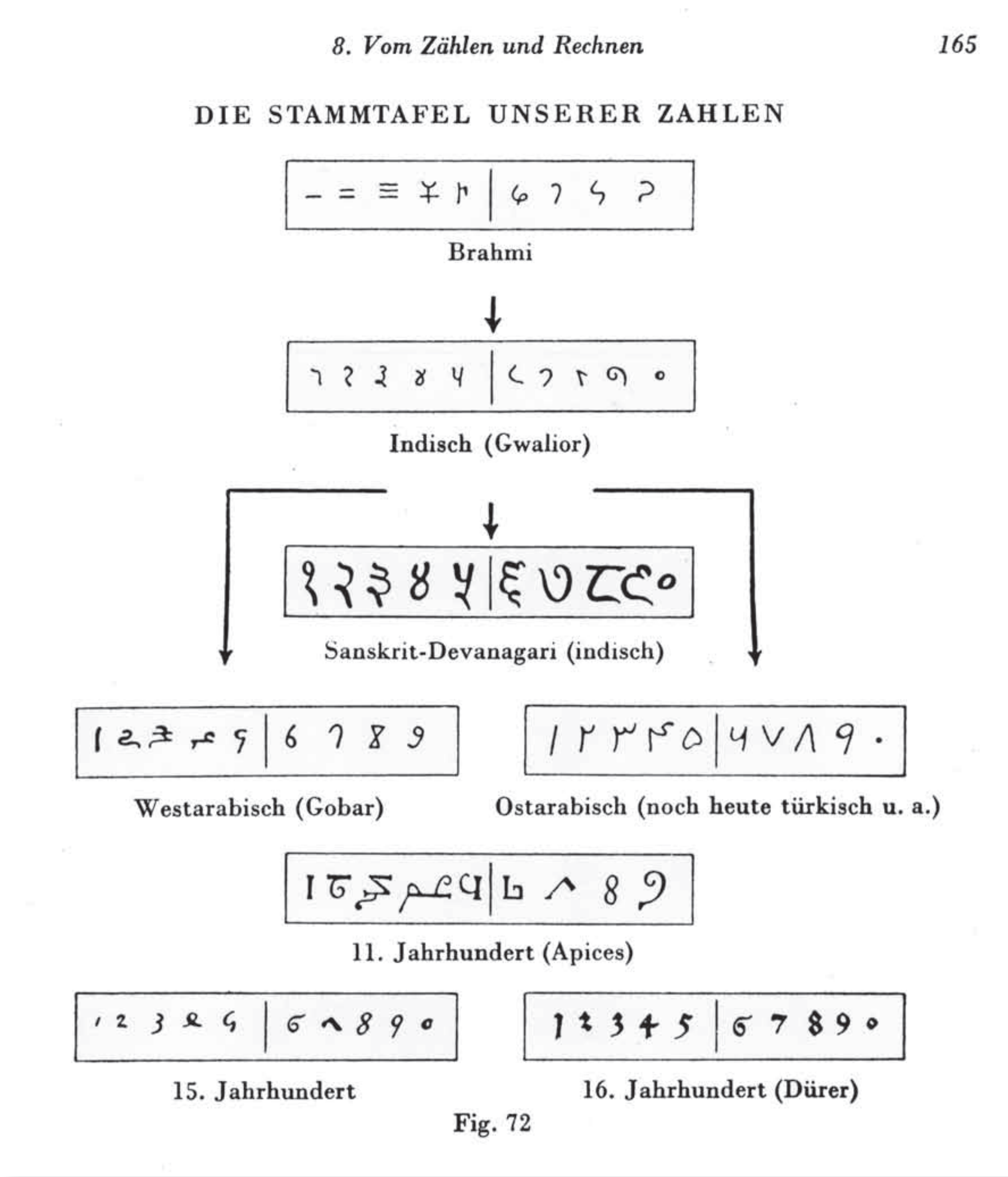
Anhang

Beda (um 673 bis 735), genannt Beda Venerabilis, beschrieb im 7. Jahrhundert ein Verfahren der Fingerrechnung.
Aus: Zählen, messen, rechnen. 1000 Jahre Mathematik in Handschriften und frühen Drucken; Ausstellung der Staatsbibliothek Bamberg zum Jahr der Mathematik 2008; Katalog; Petersberg 2008.

Al-Khwarizmi's book Kitab al-Jabr wal-Muqabala, written in the first quarter of the ninth century, is the oldest Arabic work on algebra. In it, al-Khwarizmi tried to provide a theory for the solution of all types of linear and quadratic equations. Partially translated into Latin by Robert of Chester, the text served to introduce the science of algebra to Europe.

Seite aus dem Werk „kitab al-dschabr wal-muqabala“. Abb. aus: Esposito, John L.: The Oxford History of Islam. Oxford Univ. Press, 1999.

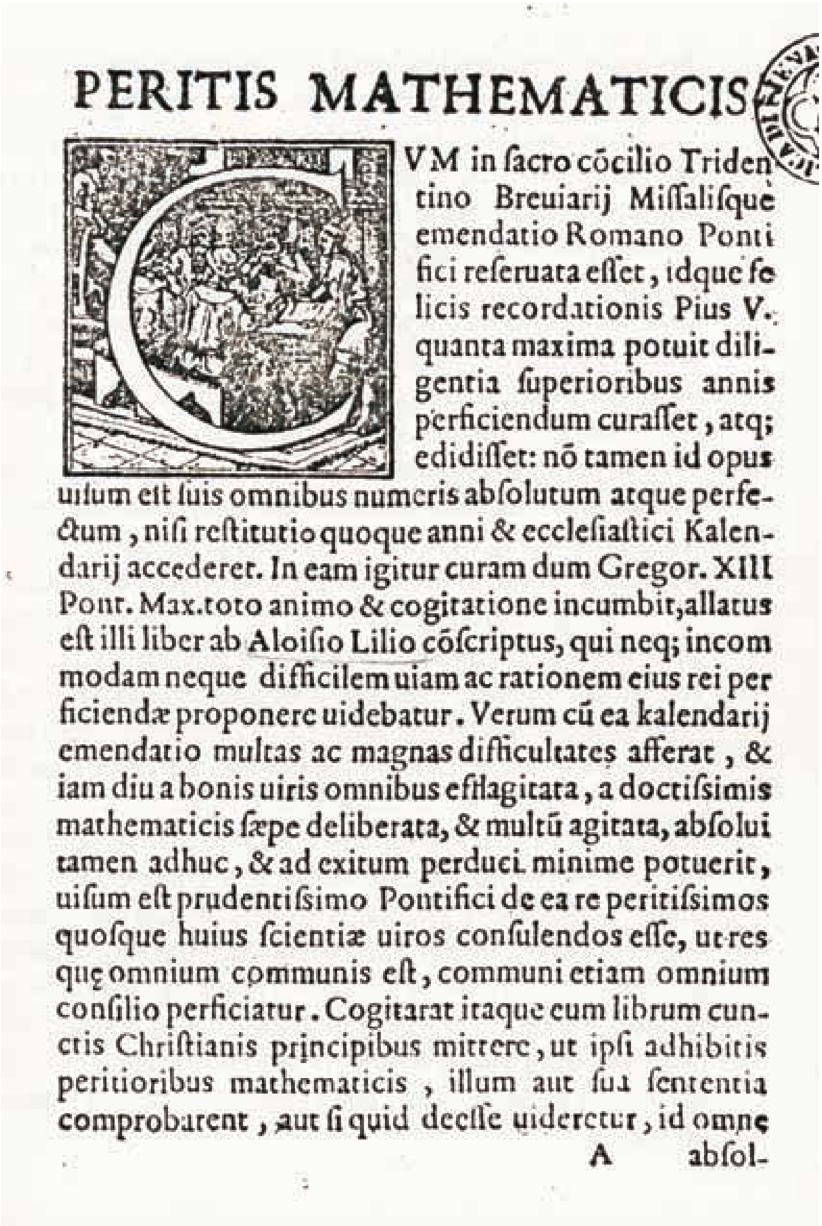
Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi (auch Al-Chwarizmi oder Al-Khwarizmi, gest. etwa im Jahr 840) trug wesentlich zur Verbreitung der neuen indischen Ziffern und der neuen Rechenmethoden bei. Am bekanntesten ist sein „kitab al-dschabr wal-muqabala“= liber algebr et almucabalah; vgl. Vogel, Kurt: Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus: Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern / Nach der einzigen (lateinischen) Handschrift (Cambridge Un. Lib. Ms. I i. 6. 5.) in Faksimile mit Transkription und Kommentar herausgegeben von Kurt Vogel. Aalen 1963.
Auf die neun Ziffern indischen Ursprungs trifft man in Europa in einer spanischen Handschrift aus dem Jahr 976, dem Codex Vigilanus.



Aus: Tietze, Heinrich: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Band 1. München 1982, S. 165.

Das Ringen der Rechensysteme: Eine allegorische Darstellung der Arithmetik aus dem Jahr 1503. Sie findet sich in der *Margarita philosophica* von Gregor Reisch (1470 - 1525).
Aus: Zählen, messen, rechnen. 1000 Jahre Mathematik in Handschriften und frühen Drucken; Ausstellung der Staatsbibliothek Bamberg zum Jahr der Mathematik 2008; Katalog; Petersberg 2008.

Der aus dem fränkischen Staffelstein stammende Ries (auch „Riese“; 1492 - 1559) vollendete 1522 sein Werk „Rechnung auff der Linihen und Federn in Zalmaß und Gewicht auff allerley Handierung“.
Aus: Zählen, messen, rechnen. 1000 Jahre Mathematik in Handschriften und frühen Drucken; Ausstellung der Staatsbibliothek Bamberg zum Jahr der Mathematik 2008; Katalog; Petersberg 2008.

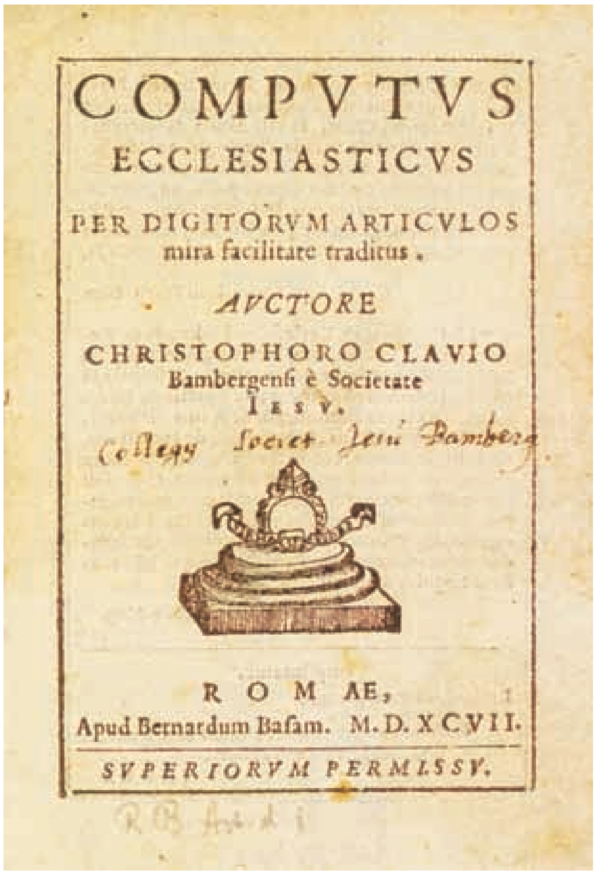


PERITIS MATHEMATICIS

CVM in ſacro cōcilio Tridentino Breuiarij Miſſaliſque emendatio Romano Pontifici reſeruata eſſet, idque felicis recordationis Pius V. quanta maxima potuit diligentia ſuperioribus annis perficiendum curaſſet, atq; edidiſſet: nō tamen id opus uiſum eſt ſuis omnibus numeris abſolutum atque perfectum, niſi reſtitutio quoque anni & eccleſiaſtici Kalendarij accederet. In eam igitur curam dum Gregor. XIII Pont. Max. toto animo & cogitatione incumbit, allatus eſt illi liber ab Aloiſio Lilio cōſcriptus, qui neq; incommodam neque difficilem uiam ac rationem eius rei perficiendæ proponere uidebatur. Verum cū ea kalendarij emendatio multas ac magnas difficultates afferat, & iam diu a bonis uiris omnibus efflagitata, a doctiſsimis mathematicis ſæpe deliberata, & multū agitata, abſolui tamen adhuc, & ad exitum perduci minime potuerit, uiſum eſt prudentiſsimo Pontifici de ea re peritiſsimos quoſque huius ſcientiæ uiros conſulendos eſſe, ut res quę omnium communis eſt, communi etiam omnium conſilio perficiatur. Cogitarat itaque cum librum cunctis Chriſtianis principibus mittere, ut ipſi adhibitis peritioribus mathematicis, illum aut ſua ſententia comprobarent, aut ſi quid deeſſe uideretur, id omne

A abſol-

Aus: Gregorius <Papa XIII.>, Lilius, Aloisius: Compendium novae rationis restituendi kalendarium/ [Vorentwurf der Kalenderreform an die weltlichen Fürsten. Basiert teilweise auf einem nicht veröffentlichten Buch des Aloisius Lilius]. Roma 1577.



COMPVTVS
ECCLESIASTICVS
PER DIGITORVM ARTICVLOS
mira facilitate traditus.
AVCTORE
CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergenſi è Societate
IESV.
Collegy Societ Jesu Bamberg
ROMAE,
Apud Bernardum Baſam. M.D.XCVII.
SVPERIORVM PERMISSV.

Mit seinem *Computus ecclesiasticus* („Kirchliche Osterfestberechnung, mittels der Fingerglieder mit wunderbarer Leichtigkeit behandelt“) gab Christoph Clavius 1597 ein weiteres Werk zur Gregorianschen Kalenderreform von 1582 heraus.
Aus: Zählen, messen, rechnen. 1000 Jahre Mathematik in Handschriften und frühen Drucken; Ausstellung der Staatsbibliothek Bamberg zum Jahr der Mathematik 2008; Katalog; Petersberg 2008.

12

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1300	113 9434	9768	$\bar{0}$102	$\bar{0}$436	$\bar{0}$770	$\bar{1}$104	$\bar{1}$437	$\bar{1}$771	$\bar{2}$105	$\bar{2}$439
01	114 2773	3107	3441	3774	4108	4442	4775	5109	5443	5776
02	6110	6443	6777	7110	7444	7777	8111	8444	8777	9111
03	9444	9777	$\bar{0}$111	$\bar{0}$444	$\bar{0}$777	$\bar{1}$110	$\bar{1}$444	$\bar{1}$777	$\bar{2}$110	$\bar{2}$443
04	115 2776	3109	3442	3775	4108	4441	4774	5107	5439	5772
05	6105	6438	6771	7103	7436	7769	8101	8434	8767	9099
06	9432	9764	$\bar{0}$097	$\bar{0}$429	$\bar{0}$762	$\bar{1}$094	$\bar{1}$427	$\bar{1}$759	$\bar{2}$091	$\bar{2}$424
07	116 2756	3088	3420	3753	4085	4417	4749	5081	5413	5745
08	6077	6409	6741	7073	7405	7737	8069	8401	8733	9065
09	9396	9728	$\bar{0}$060	$\bar{0}$392	$\bar{0}$723	$\bar{1}$055	$\bar{1}$387	$\bar{1}$718	$\bar{2}$050	$\bar{2}$381
1310	117 2713	3044	3376	3707	4039	4370	4702	5033	5364	5696
11	6027	6358	6689	7021	7352	7683	8014	8345	8676	9007
12	9338	9669	$\bar{0}$000	$\bar{0}$331	$\bar{0}$662	$\bar{0}$993	$\bar{1}$324	$\bar{1}$655	$\bar{1}$986	$\bar{2}$316
13	118 2647	2978	3309	3639	3970	4301	4631	4962	5293	5623
14	5954	6284	6615	6945	7276	7606	7936	8267	8597	8927
15	9258	9588	9918	$\bar{0}$248	$\bar{0}$578	$\bar{0}$909	$\bar{1}$239	$\bar{1}$569	$\bar{1}$899	$\bar{2}$229
16	119 2559	2889	3219	3549	3879	4209	4539	4868	5198	5528
17	5858	6187	6517	6847	7177	7506	7836	8165	8495	8825
18	9154	9484	9813	$\bar{0}$143	$\bar{0}$472	$\bar{0}$801	$\bar{1}$131	$\bar{1}$460	$\bar{1}$789	$\bar{2}$119
19	120 2448	2777	3106	3436	3765	4094	4423	4752	5081	5410
1320	5739	6068	6397	6726	7055	7384	7713	8042	8371	8699
21	9028	9357	9686	$\bar{0}$014	$\bar{0}$343	$\bar{0}$672	$\bar{1}$000	$\bar{1}$329	$\bar{1}$657	$\bar{1}$986
22	121 2315	2643	2972	3300	3628	3957	4285	4614	4942	5270
23	5598	5927	6255	6583	6911	7239	7568	7896	8224	8552
24	8880	9208	9536	9864	$\bar{0}$192	$\bar{0}$520	$\bar{0}$848	$\bar{1}$175	$\bar{1}$503	$\bar{1}$831
25	122 2159	2487	2814	3142	3470	3797	4125	4453	4780	5108
26	5435	5763	6090	6418	6745	7073	7400	7727	8055	8382
27	8709	9036	9364	9691	$\bar{0}$018	$\bar{0}$345	$\bar{0}$672	$\bar{1}$000	$\bar{1}$327	$\bar{1}$654
28	123 1981	2308	2635	2962	3289	3616	3942	4269	4596	4923
29	5250	5577	5903	6230	6557	6883	7210	7537	7863	8190
1330	8516	8843	9169	9496	9822	$\bar{0}$149	$\bar{0}$475	$\bar{0}$802	$\bar{1}$128	$\bar{1}$454
31	124 1781	2107	2433	2759	3086	3412	3738	4064	4390	4716
32	5042	5368	5694	6020	6346	6672	6998	7324	7650	7976
33	8301	8627	8953	9279	9605	9930	$\bar{0}$256	$\bar{0}$582	$\bar{0}$907	$\bar{1}$233
34	125 1558	1884	2209	2535	2860	3186	3511	3837	4162	4487
35	4813	5138	5463	5788	6114	6439	6764	7089	7414	7739
36	8065	8390	8715	9040	9365	9690	$\bar{0}$015	$\bar{0}$339	$\bar{0}$664	$\bar{0}$989
37	126 1314	1639	1964	2288	2613	2938	3263	3587	3912	4237
38	4561	4886	5210	5535	5859	6184	6508	6833	7157	7481
39	7806	8130	8454	8779	9103	9427	9751	$\bar{0}$076	$\bar{0}$400	$\bar{0}$724
1340	127 1048	1372	1696	2020	2344	2668	2992	3316	3640	3964
41	4288	4612	4935	5259	5583	5907	6230	6554	6878	7202
42	7525	7849	8172	8496	8819	9143	9466	9790	$\bar{0}$113	$\bar{0}$437
43	128 0760	1083	1407	1730	2053	2377	2700	3023	3346	3670
44	3993	4316	4639	4962	5285	5608	5931	6254	6577	6900
45	7223	7546	7869	8191	8514	8837	9160	9483	9805	$\bar{0}$128
46	129 0451	0773	1096	1418	1741	2064	2386	2709	3031	3354
47	3676	3998	4321	4643	4965	5288	5610	5932	6255	6577
48	6899	7221	7543	7865	8187	8510	8832	9154	9476	9798
49	130 0119	0441	0763	1085	1407	1729	2051	2372	2694	3016
1350	3338	3659	3981	4303	4624	4946	5267	5589	5911	6232
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	334	333	332	331	330	329	328	327	326	325	324	323	322	321
1	33.4	33.3	33.2	33.1	33.0	32.9	32.8	32.7	32.6	32.5	32.4	32.3	32.2	32.1
2	66.8	66.6	66.4	66.2	66.0	65.8	65.6	65.4	65.2	65.0	64.8	64.6	64.4	64.2
3	100.2	99.9	99.6	99.3	99.0	98.7	98.4	98.1	97.8	97.5	97.2	96.9	96.6	96.3
4	133.6	133.2	132.8	132.4	132.0	131.6	131.2	130.8	130.4	130.0	129.6	129.2	128.8	128.4
5	167.0	166.5	166.0	165.5	165.0	164.5	164.0	163.5	163.0	162.5	162.0	161.5	161.0	160.5
6	200.4	199.8	199.2	198.6	198.0	197.4	196.8	196.2	195.6	195.0	194.4	193.8	193.2	192.6
7	233.8	233.1	232.4	231.7	231.0	230.3	229.6	228.9	228.2	227.5	226.8	226.1	225.4	224.7
8	267.2	266.4	265.6	264.8	264.0	263.2	262.4	261.6	260.8	260.0	259.2	258.4	257.6	256.8
9	300.6	299.7	298.8	297.9	297.0	296.1	295.2	294.3	293.4	292.5	291.6	290.7	289.8	288.9

13000″ = 3° 36′ 40″	1300″ = 0° 21′ 40″	S. 4.685 5720	T. 5806
13100 = 3 38 20	1310 = 0 21 50	5719	5807
13200 = 3 40 0	1320 = 0 22 0	5719	5808
13300 = 3 41 40	1330 = 0 22 10	5719	5809
13400 = 3 43 20	1340 = 0 22 20	5718	5810

Aus: Georg's Freiherrn von Vega logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 47. Auflage. 8. Abdruck der neuen vollst. durchges. u. erw. 40. Stereotyp-Ausgabe. Bearb. von C. Bremiker. Berlin 1863.

F U G G E R B R I E F E
K U N D E N I N F O R M A T I O N E N D E R F Ü R S T F U G G E R P R I V A T B A N K K G
Ausgabe Nr. 2/2006 Augsburg – München – Nürnberg – Stuttgart 8. Jahrgang

Sensationeller Archivfund bei einer Recherche der Fürst Fugger Privatbank

Das Haus Fugger – schon seit dem Jahr 1486 als Bank tätig

Die früheste Bezeichnung als „Bank" ist nun für ein deutsches Unternehmen mit Originaldokument belegt. Ein Schreiben aus dem Jahre 1486, das jetzt bei einer Recherche für die Fürst Fugger Privatbank aufgefunden wurde, ist als die Schlüsselstelle in der Geschichte der Familie Fugger zu werten, nicht nur für das 15. Jahrhundert, sondern insgesamt. Ein Meilenstein in der Frühgeschichte des deutschen Bankwesens: Kein anderes Bankhaus des deutschsprachigen Raumes kann sich einer derartigen Tradition rühmen.

Der erste Absatz der kürzlich entdeckten Briefkopie des Augsburger Stadtschreibers Meister Valentin an den Pfarrer Paul Koler (Stadtarchiv Augsburg, Bestand „Schätze", Nr. 105/VIIIb, ep1, fol1) betrifft das Haus Fugger und lautet, dem heutigen Sprachgebrauch angepasst, folgendermaßen:

Dem würdigen hochgelehrten Herrn Paul Koler, Pfarrer zu Egk und Licentiat, unserem lieben Herrn, entbieten wir, die Ratgeber der Stadt Augsburg, unseren freundlichen und allzeit bereitwilligen Dienst.

Lieber Herr, wir hoffen, dass Ihr jetzt unsere Briefe, die kurz nacheinander ausgelaufen sind, auch erhalten habt. Ihr hattet uns und unserem Stadtschreiber Meister Valentin drei Schreiben zukommen lassen. Unseren Briefen könnt Ihr nun entnehmen, dass wir diesem (Stadtschreiber) befohlen haben, für Euch bei der Herrschaft in Venedig (= Administration des venezianischen Doganats) und auch bei den Eidgenossen Beförderungsschreiben (= eine Art Passbrief zur Reise durch fremde Territorien) anzufordern. Wir sind zuversichtlich, dass Euch dieses von der Herrschaft in Venedig mittlerweile zugekommen sein wird. Außerdem ist Auftrag an die Banck von Ulrich Fugker in Venedig erteilt worden (zur Geldauszahlung für die Reise). Auch der Beförderungsbrief von den Eidgenossen werde in Kürze eintreffen, so dass wir insgesamt keinen Zweifel mehr hegen, dass er (der Stadtschreiber Valentin) uns zuliebe allen Fleiss angewendet und keiner Mühe (für Euch) müde geworden ist […]

[…] gegeben am Sankt Johannstag in den Weihnächten anno 86 (= 27.12.1486).

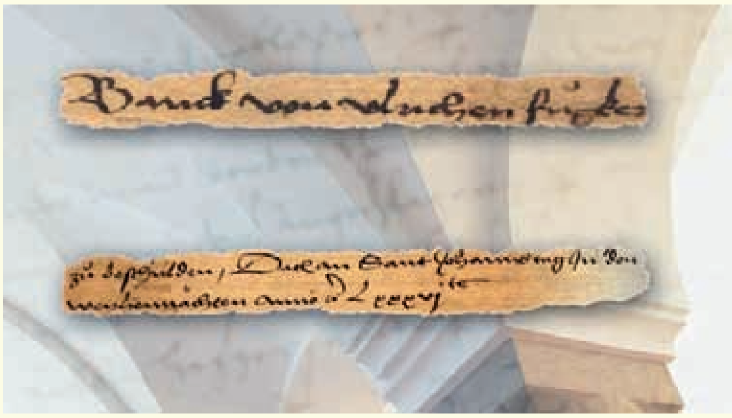
Demnach muss der Adressat Pfarrer Paul Koler in mehreren vorangegangenen Schreiben beim Rat der Stadt Augsburg um einige „Beförderungsschreiben" gebeten haben. Damit waren die seinerzeit üblichen Passbriefe gemeint, mit deren Hilfe Koler durch die fremden Territorien der Schweizer Eidgenossenschaft und in das Herrschaftsgebiet der Republik Venedig einreisen wollte, das damals weite Teile Oberitaliens umfasste. Die im Schreiben erwähnten Eidgenossen geben einen Hinweis, dass seine Reiseroute nicht über den Brenner, sondern über Memmingen, Lindau, Chur und dann einen der Schweizer Pässe in Richtung Italien führen sollte, ein für einen Schwaben damals durchaus üblicher Weg.

Die persönlichen Beziehungen zwischen Augsburger Rat und Familie Fugger, auf die der Pfarrer zurückgriff, erleichterten die für eine Auslandsreise unerlässliche Barmittelbeschaffung. Denn das unpraktische und örtlich nur begrenzt gültige Münzgeld bedeutete im 15. Jahrhundert eine nicht zuletzt auch gefährliche Beschwernis beim Reisen. Einige der international arbeitenden Handelshäuser betrieben deshalb auch Bankgeschäfte. Um bei diesen Firmen vor Reiseantritt Empfehlungsschreiben wie auch schriftliche Anweisungen zur Geldaushändigung zu erlangen, brauchte es gute Kontakte.

Im vorliegenden Fall hatte der Rat der Stadt Augsburg beim dortigen Fugger-Stammhaus für Koler eine Einzahlung in einheimischer Währung veranlasst. Dessen Gegenwert sollte der Pfarrer nach seiner Ankunft in Venedig von der Niederlassung der Fugger im „Fondaco dei Tedeschi", dem Handelshaus der Deutschen, gleich bei der Rialtobrücke, in lokal gültiger Währung bar ausbezahlt bekommen – ein klassisches Bankgeschäft.

Die Erlaubnis der venezianischen Herrschaft, in diesem „Fondaco dei Tedeschi" (heute die Hauptpost von Venedig) ein eigenes Kontor einzurichten, war dem Haus Fugger erst zwei Jahre zuvor, 1484, erteilt worden. Wie wir aus späteren Quellen erfahren, beeindruckte es selbst italienische Künstler durch seine anspruchsvolle Ausstattung mit Marmor, kostbaren Wandteppichen und Gemälden. Schon ab 1489 überließen die Venezianer die Räumlichkeiten der Firma Fugger kostenlos und auf unbegrenzte Dauer. Begründet wurde dies bezeichnenderweise damit, dass die Fugger für Instandhaltung und Ausstattung bereits immenses Geld ausgegeben hätten („ingentem pecuniarum quantitem").

Dr. Christl Karnehm, Historikerin, München



Das früheste Schriftstück, in dem die Augsburger Fugger-Firma als „Banck von Ulrich Fugker" bezeichnet wird, belegt die einzigartige Tradition der Fürst Fugger Privatbank: ein Brief, der auf den 27. Dezember 1486 datiert ist.

Inhalt

Aus: Zickert, Hermann: Die acht Gebote der Finanzkunst. Alles, was jeder wissen muß, der ein Vermögen erwerben oder vermehren will. Berlin 1924.

Unausgeglichene Sterblichkeitstafel aus den Huddeschen Beobachtungen:

Alter	Lebende	Tote	Alter	Lebende	Tote	Alter	Lebende	Tote
1	1495	0	34	1062	9	67	309	22
2	1495	1	35	1053	24	68	287	20
3	1494	1	36	1029	21	69	267	19
4	1493	0	37	1008	19	70	248	38
5	1493	5	38	989	22	71	210	18
6	1488	6	39	967	12	72	192	22
7	1482	6	40	955	24	73	170	21
8	1476	5	41	931	18	74	149	17
9	1471	6	42	913	23	75	132	19
10	1465	6	43	890	22	76	113	20
11	1459	2	44	868	20	77	93	19
12	1457	10	45	848	29	78	74	10
13	1447	11	46	819	20	79	64	10
14	1436	8	47	799	20	80	54	10
15	1428	10	48	779	18	81	44	7
16	1418	8	49	761	22	82	37	11
17	1410	17	50	739	23	83	26	3
18	1393	19	51	716	29	84	23	7
19	1374	23	52	687	15	85	16	5
20	1351	16	53	672	23	86	11	4
21	1335	12	54	649	28	87	7	2
22	1323	21	55	621	26	88	5	2
23	1302	26	56	595	21	89	3	0
24	1276	27	57	574	19	90	3	0
25	1249	17	58	555	28	91	3	2
26	1232	19	59	527	33	92	1	0
27	1213	30	60	494	28	93	1	0
28	1183	25	61	466	26	94	1	0
29	1158	17	62	440	29	95	1	0
30	1141	26	63	411	22	96	1	0
31	1115	15	64	389	23	97	1	1
32	1100	19	65	366	24	98	0	1
33	1081	19	66	342	33			

Die vorliegende Tabelle von Johannes Hudde (1628 - 1704) zeigt, wie die 1495 Leibrenteninhaber, welche in den Jahren 1586 bis 1590 Leibrenten von der Regierung der Vereinigten Provinzen gekauft haben, allmählich ausgestorben sind. Sie sind nach dem Eintrittsalter, jedoch nicht nach dem Geschlecht verteilt.
Aus: Braun, Heinrich: Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik. Berlin 1963, S. 89.

T 5
De Witt
Wærdye van Lyf-Renten

WAERDYE

Van

LYF-RENTEN

Naer proportie van

LOS-RENTEN.

IN 'sGRAVEN-HAGE,

By JACOBUS SCHELTUS, Ordinaris Drucker van de Edele Groot Mog. Heeren Staten van Hollandt en Weſt-Vrieſlandt, woonende op het Binnen-Hof,

Anno 1671.

22 Jakob Bernoulli III

Johan de Witt (1625 - 1672) brachte seine *Waedye van Lyf-Renten* im Jahre 1671 heraus. Es waren die ersten Ansätze für die Bewertung von Leibrenten unter Berücksichtigung der Sterblichkeit und des Zinssatzes.
Aus: Bernoulli, Jakob: Werke von Jakob Bernoulli. [Wahrscheinlichkeitsrechnung] / [bearb. von Barthel L. van der Waerden] / 3. Bd. Hrsg. von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Basel 1975.

Erinnerung.

Herr Euler ist zu diesem Aufsatze durch die Bemühungen einer Anlegung von Witwencassen veranlaßt worden, die itzo in unterschiedenen Ländern unternommen werden. Besonders hat ihm hierzu eine Schrift Gelegenheit gegeben, die zu Göttingen 1768 im Vandenhoekischen Verlage, unter der Aufschrift erschienen ist: Oeconomisch - politische Auflösung der wichtigsten Fragen, welche itzo wegen der Einrichtung dauerhafter Witwencassen aufgeworfen werden. Herr Euler hat diese Schrift für gründlich abgefaßt erkannt. Sie ist von dem Rathsherrn zu Göttingen, Herrn Kritter, der über diese Sache vieles, und mit verdientem Beyfalle, gearbeitet hat. Herrn Kritters vorlängst verfaßte Berechnungen stimmen mit demjenigen überein, was sich nach Herr Eulers Formeln berechnen läßt, wenn man die Erfahrungen von der Sterblichkeit, die Süßmilch gesammlet hat, zum Grunde legt.

A. G. Kästner.

II. Jo

Aus: Neues Hamburgisches Magazin. 1767 - 81. 8. Bd., 43. St., 1770, Seiten 3-13.

„(Wenn Herr Universitätsrath K. glaubt, dass es auch bei allen diesen Kassen an Calcül nicht gefehlt haben werde, so hat er ohne Zweifel Recht; wenn er aber daraus auf die Bodenlosigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung schliessen will, so hat er Unrecht. Allerdings gibt es viele Wörter, mit denen verschiedene Personen verschiedene Bedeutungen verbinden, imgleichen solche, die wissenschaftlich eine sehr bestimmte Bedeutung haben, unter denen man aber im gemeinen Leben oft sehr disparate Dinge zusammenwirft. So ist es mit dem Ausdruck Wahrscheinlichkeitsrechnung bewandt. Im strengen Sinne verstanden kann von Anwendung derselben in allen den Fällen gar nicht die Rede sein, wo die nöthigen Grundlagen fehlen. Bei allen den gescheiterten Witwenkassen ist bei der Anordnung der Einrichtung von der strengen Wahrscheinlichkeitsrechnung gar kein Gebrauch gemacht, sondern nur von vagen Aperçüs. Dies spreche ich hier nur als Thatsache aus, aber nicht als Vorwurf, da in der That eine Basirung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung schon darum unmöglich war, weil alle nothwendigen Bedingungen dazu fehlen).“

Ein Auszug aus dem Gutachten von Carl Friedrich Gauß zur Lage der 1739 gegründeten Göttinger Professorenwitwenkasse aus dem Jahr 1845.

Aus: Gauß, Carl Friedrich: Werke. Band IV, 2. Abdr. Nachlass.
[Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Auf die Bestimmung der Bilanz für Witwenkassen.]. Herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1880, S. 123.

6 Ueber Sterblichkeit.

$$h = \frac{x^{a_1}(1-x)^{a-a_1}\,dx}{\int_0^1 x^{a_1}(1-x)^{a-a_1}\,dx}$$

Das Integral im Nenner hängt nur von a_1 und a ab, daher sind die Wahrscheinlichkeiten aller der verschiedenen Hypothesen nur vom Werthe des Zählers dieses Bruches abhängig; an sich ist für jede einzelne Hypothese die Wahrscheinlichkeit h unendlich klein; es existirt aber unter allen eine Hypothese, für welche die Wahrscheinlichkeit ein Maximum ist, d. i. nämlich diejenige, für welche man hat

$$x^{a_1}(1-x)^{a-a_1} = \text{Maximum}$$

und hieraus bestimmt sich:

$$x = \frac{a_1}{a}$$

als die einfache Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weissen Kugel »nach derjenigen Hypothese, deren Wahrscheinlichkeit auf Grund der gemachten Beobachtung ein Maximum ist,« oder wie sich auch kurz sagen lässt, es ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach der wahrscheinlichsten Hypothese.

Für den Fall, der uns nun hier speciell beschäftigt, ist der vorstehende Werth sonach auch für einen m-jährigen Menschen die Wahrscheinlichkeit, nach t Jahren noch zu leben, unter Annahme der wahrscheinlichsten Hypothese.

Dieser Werth von x ist es, den man unter der Voraussetzung $t = 1$ für jedes Alter bestimmen und als Werth von p in die Mortalitätstabelle (zweite Columne obiger Zusammenstellung) eintragen würde.

Der wahre Werth von p lässt sich freilich nicht ermitteln, wohl aber lässt sich durch fortgesetzte Beobachtungen der angegebenen Art der Werth x dem wahren Werthe p näher und näher bringen. Nach dieser Bemerkung könnte es allerdings richtiger erscheinen, den Ueberschriften der Mortalitätstabellen: »Wahrscheinlichkeit, am Ende des nächsten Jahres noch zu leben,« oder »im Laufe des nächsten Jahres zu sterben«, den Zusatz »nach der wahrscheinlichsten Hypothese« beizufügen; für den Mathematiker kann aber hierüber kein Zweifel herrschen, da man es bei allen

Aus: Zeuner, Gustav: Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik. Leipzig 1869.

— 4 —

Schon kurz vor der Veröffentlichung meiner Arbeit war in verschiedenen Schriften die Forderung gestellt worden, in der Bevölkerungsstatistik eine strengere mathematische Behandlung, namentlich zur Messung der Sterblichkeit, als sie bisher üblich gewesen, eintreten zu lassen, auch die Aufzeichnungen derselben dementsprechend einzurichten. Ich nenne:

Dr. Heym, ein Mahnruf an die Statistiker, im Jahrgang 1862 der Rundschau, Zeitschrift für das Versicherungswesen;

derselbe, die Sterblichkeit im Königreich Sachsen, im Jahrgang 1863 der Zeitschrift des Königlich Sächsischen statistischen Bureaus;

Dr. Wittstein, zur Bevölkerungsstatistik, im Jahrgang 1863 der Zeitschrift des Königlich Preussischen statistischen Bureaus;*)

derselbe, mathematische Statistik, Hannover 1867;

ein Ungenannter, die neuesten Untersuchungen über die mittlere Lebensdauer, im Jahrgang 1863 von Hildebrand's Jahrbüchern für Nationalökonomie und Statistik;

Dr. G. Meyer, die mittlere Lebensdauer, im VIII. Bande (1867) von Hildebrand's Jahrbüchern für Nationalökonomie und Statistik.**)

In anderen Schriften war das Bestreben hervorgetreten, zweckmässigere Methoden zur Berechnung von Sterbetafeln aus gegebenem bevölkerungsstatistischem Material aufzustellen, als bisher zur Anwendung gekommen waren. Ausser den verschiedenen einschlägigen Schriften unseres hochverehrten A. Quetelet und den officiellen Documenten verschiedener Staaten, namentlich Belgiens (Quetelet, Heuschling), Englands (vor allen: Farr im 5th annual report of the registrar general, London 1863), der Niederlande (von Baumhauer), Schwedens (Berg), Bayerns (vor allen: Dr. v. Hermann, Mortalität und Vitalität im Königreich Bayern, München 1867) — auch meine spätere Abhandlung „Preussische Sterbetafeln" im Jahrgang 1869 der Zeitschrift des Königlich Preussischen statistischen Bureaus gehört hierher — führe ich auf:

Dr. Farr, im Programme de la 4ième Session du Congrès international de Statistique, Londres 1861;

Dr. Bertillon, des diverses manières de mesurer la durée de la vie humaine, im Jahrgang 1866 des Journal de la société de statistique, Paris 1866.

Von hervorragender Bedeutung für die vorliegende Frage sind aber die später erschienenen Schriften von Knapp und Zeuner:

Dr. G. F. Knapp, über die Ermittelung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik, Leipzig 1868;

derselbe, die Sterblichkeit in Sachsen, Leipzig 1869;

derselbe, Theorie des Bevölkerungswechsels, Braunschweig 1874;

Dr. G. Zeuner, Abhandlungen aus der mathematischen Statistik, Leipzig 1869.

---

*) Hier wird, meines Wissens zum erstenmal, die Forderung gestellt, die Verstorbenen statt nach dem Alter, nach den Geburtsjahren einzutheilen, was bekanntlich seit dem Jahre 1864 in Preussen geschieht.

**) In dieser Abhandlung ist zuerst die Forderung, die Verstorbenen nach Alter und Geburtsjahr zugleich einzutheilen, öffentlich ausgesprochen.

Aus: Becker, K.: Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen. Gutachten über die Frage: Welche Unterlagen hat die Statistik zu beschaffen, um richtige Mortalitätstafeln zu gewinnen? Berlin 1874

Resolutionen,

betreffend die zur Berechnung richtiger Mortalitätstafeln von der Statistik zu beschaffenden Unterlagen.

1. Den Stand der Bevölkerung betreffend.

a) Es ist erforderlich, dass der Stand der Bevölkerung längstens alle 10 Jahre durch Volkszählungen ermittelt, und dass dabei die Bevölkerung nach den Geburtsjahren eingetheilt, dieselbe auch auf den Jahresanfang oder Jahresschluss festgestellt werde. Findet die Volkszählung am Jahresanfang oder Jahresschluss statt, so kann die Bevölkerung nach einjährigen Altersklassen, statt nach Geburtsjahren, eingetheilt werden.

b) Wo es zur Erzielung richtiger Zählungsergebnisse nicht thunlich ist, die Volkszählung am Jahresanfang oder Jahresschluss vorzunehmen, da müssen die Lebendgeborenen und die Verstorbenen, letztere nach den Geburtsjahren eingetheilt, für den durch den Jahresanfang und den Volkszählungstermin oder durch diesen letzteren und den Jahresschluss begrenzten Theil des Zählungsjahres nachgewiesen werden, um mit Hilfe dieser Nachweisungen die Bevölkerung nach Geburtsjahren auf den Anfang oder Schluss des Zählungsjahres berechnen zu können.

c) Werden die Lebendgeborenen und die Verstorbenen der jüngsten Geburtsjahresklasse nach den Geburtsmonaten, die Verstorbenen der zweitjüngsten Geburtsjahresklasse nach den Geburtsquartalen nachgewiesen, so ist nicht erforderlich, die Vertheilung der beiden jüngsten Geburtsjahresklassen der Bevölkerung auf die Geburtsmonate bezw. Geburtsquartale durch die Volkszählung zu ermitteln.

Andernfalls aber empfiehlt es sich, die in Frage stehende Vertheilung der beiden jüngsten Geburtsjahresklassen der Bevölkerung aus den Volkszählungsergebnissen nachzuweisen. Wenn jedoch der Volkszählungstermin nicht auf den Jahresanfang oder Jahresschluss fällt, so ist dieser Nachweis nur für den Fall von Nutzen, dass die Lebendgeborenen und die Verstorbenen der beiden jüngsten Geburtsjahresklassen wenigstens für den durch den Zählungstermin und den Jahresanfang oder Jahresschluss begrenzten Theil des Zählungsjahres nach den Geburtsmonaten bezw. Geburtsquartalen eingetheilt sind.

d) Zur Berechnung richtiger Mortalitätstafeln empfiehlt es sich nicht, 5- oder 10-jährige Volkszählungsperioden und runde (mit einer Null endigende) Zählungsjahre zu wählen.

2. Die Geburten betreffend.

a) Es ist erforderlich, die Zahl der Lebendgeborenen jährlich nachzuweisen.

b) Es empfiehlt sich, die Lebendgeborenen nach den Monaten der Geburt zu unterscheiden und jährlich die Zahl der Todtgeborenen zu ermitteln.

3. Die Sterbefälle betreffend.

a) Es ist erforderlich, die Zahl der Verstorbenen und ihre Vertheilung nach einjährigen — wo möglich auch für das erste Lebensjahr nach monatlichen, für das zweite nach vierteljährlichen — Altersklassen, sowie die Vertheilung jeder Altersklasse nach den beiden Geburtsjahren, aus welchen die betreffenden Verstorbenen herstammen, jährlich nachzuweisen.

b) Es empfiehlt sich, neben der vorgedachten Nachweisung die Verstorbenen der jüngsten Geburtsjahresklasse nach den Monaten, der zweitjüngsten nach den Quartalen der Geburt einzutheilen.

4. Die Wanderungen betreffend.

Es empfiehlt sich, die Zahl der Zu- und Fortgezogenen so vollständig als möglich und thunlichst nach denselben Unterscheidungen, wie sie für die Verstorbenen gefordert sind, jährlich nachzuweisen.

5. Die Gleichartigkeit der Nachweisungen betreffend.

Alle Nachweisungen über die Lebenden, Geborenen, Verstorbenen und Gewanderten müssen sich auf dieselbe Art der Bevölkerung beziehen.

Da dies zweckmässig nur die factische Bevölkerung sein kann, so wird empfohlen,

a) bei den Volkszählungen nur die Ortsanwesenden, diese aber ohne Ausnahme, zu zählen,

b) Geburts- und Sterbefälle sämmtlich und ausschliesslich da nachzuweisen, wo sie vorgekommen sind.

Aus: Becker, K.:
Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen. Gutachten über die Frage: Welche Unterlagen hat die Statistik zu beschaffen, um richtige Mortalitätstafeln zu gewinnen? Berlin 1874, S. 68 u.69.

Tabelle Vf. **Mittlere Lebensdauer.** XVI 5.

Alter	Frankreich 1890—92: I. 10 stärkst städtische Departements, männl.	I. weibl.	II. 10 stark industrielle Departements, männl.	II. weibl.	III. 65 mehr agrarische Departements, männl.	III. weibl.	Württemberg 1890—91, männl.	Württemberg weibl.	Bayern 1891—95: Städte, männl.	Städte weibl.	Bezirksämter männl.	Bezirksämter weibl.	Victoria 1890—92, männl.	Victoria weibl.	Neusüdwales 1890—92*), männl.	Neusüdwales weibl.	Preufsen 1894—97, männl.	Preufsen weibl.
0	36,36	40,08	41,27	45,58	43.80	46,13	—	—	—	—	—	—	—	—	49,60	52,90	41,53	44,99
5	48,83	51,52	51,15	54,58	52,88	53,77	52,99	53,55	51,15	53,51	52,37	53,5	53,3	56,0	54,90	57,42	53,53	55,75
10	45,61	48,35	47,30	50,91	49,14	50,22	49,63	50.27	47,56	50,10	49,86	50,0	49,36	52,02	50,89	53,39	50,00	52,30
15	41,42	44,39	43,01	46,75	44,93	46,15	45,27	46,04	—	—	—	—	45,0	47,64	46.40	48,78	45,68	48,12
20	37,78	40,88	39,05	43,02	41,14	42.54	41.17	41,97	38,91	41,99	41,36	41,6	40,81	43,49	42.16	44,46	41,63	44,02
25	34,33	37,26	35,60	39,49	37,94	38,87	37,45	38,14	—	—	—	—	36,9	39,6	38,16	40,34	37,81	40,05
30	30.82	33.86	31,91	35,92	34,32	35,35	33.66	34,41	31,08	34,33	33,90	34,2	33,07	35,85	34,30	36,42	33,87	36,19
35	27,44	30,44	28,35	32,36	30,71	31,76	29.84	30,74	—	—	—	—	29.33	32,25	30,51	32,64	30,01	32,42
40	24.21	26,92	24,79	28,65	27,02	28,02	26,12	27.13	24,22	27,15	26.25	27.1	25,74	28,78	26.84	29,00	26,32	28,67
45	21.06	23,35	21,38	24,97	23.44	24,32	22,67	23,48	—	—	—	—	22,28	25,45	23,27	25,34	22,80	24,98
50	17,97	19,80	18,60	21,20	19,73	20.45	19,23	19.82	18,27	20,05	19,1	18,7	19,06	22,06	19,82	21,61	19,47	21,08
55	15.01	16,41	15,31	17.61	16,29	17,08	15,93	16,27	—	—	—	—	15,79	18,29	15,58	17,92	16.26	17,41
60	12.25	13,17	12,15	14,16	13,03	13,66	12,93	13.04	11,56	13,47	12,7	12,8	12,80	15,05	13,60	14,51	13,28	14,05
65	9.78	10,37	9,26	11,15	10,30	10,79	10,21	10.27	—	—	—	—	10,7	11,93	10,97	11,41	10,57	11,04
70	7,57	7,98	6,52	8,44	7,86	8,26	7,93	8,04	7,37	8,20	7,6	6,6	8,5	9,3	8,64	8,64	8.22	8,69
75	5,80	6,06	5,75	6,27	5,95	6,32	—	—	—	—	—	—	6,7	7,4	6,51	6,47	6,21	6,56
80	4,42	4,55	4,23	4,54	4,52	4,90	—	—	—	—	—	—	5,4	5,4	5,00	5,04	4,60	4,90

*) Nach „The wealth and progress of New South Wales, by Coghlan, Sydney 1897, pag. 684“.

135

Tabelle Vi. **Mittlere Lebensdauer.** 138

Alter	Equitable 1760—1820	Brune 1776—1845, männl.	Brune weibl.	Deparcieux 1689—96	20 engl. Gesellschaften 1720—1863	17 engl. Gesellschaften 1762—1840	Gotha 1828—78	Gotha Elementarlehrer	Gotha Gymnasiallehrer	Demonferraud 1817—32, männl.	Demonferraud weibl.	Farr 1838—54, männl.	Farr weibl.	Deutsche Sterbetafel (23 Gesellschaften)	Deutsche Rentner, Sterbetafel	Sterbetafel für die ländliche Bevölkerung von Pommern, Posen, Ost- u. Westpreufsen 1895—96
5	—	—	—	48,3	—	—	—	—	—	49,3	49,7	49,7	50,3	—	—	—
10	43,7	—	—	46,8	49,9	48,4	—	—	—	47,1	47,4	47,1	47,7	—	—	—
15	40,4	—	—	43,5	45,9	45.0	46,6	—	—	43,5	43,7	43,2	43,9	—	—	—
20	37,1	40,3	39,1	40,2	42,0	41,5	42,6	—	—	40,4	40,1	39,5	40,3	40,45	37,18	—
25	34,3	36,5	36,5	37,2	38,4	38,0	38,7	—	—	37,4	36,8	36,1	37,0	—	—	—
30	31,5	32.7	33,6	34,1	34,8	34,4	34,7	36,05	36,56	34,1	33,4	32,8	33,8	32,86	37,04	37,00
35	28,7	28,9	30,5	31,0	31,2	30,9	30,7	32,03	32,61	30,5	30,0	29,4	30,6	—	—	32,90
40	25,7	25,4	27,2	27,5	27,6	27,3	26,8	28,03	28,50	27,0	26,6	26,1	27,3	25,55	28,57	28,83
45	22,6	21,9	23,7	24,0	24,0	23,7	23,0	24,09	24,51	23,4	23,1	22,8	24,1	—	—	24,99
50	19.4	18,6	20,2	20,4	20,5	20,2	19,4	20,29	20,75	19,9	19,6	19,5	20,8	18,73	20,98	21,25
55	16,3	15,4	16,7	17,3	17,1	16,9	16,0	16,69	17,15	16,6	16,3	16,5	17,4	—	—	17,76
60	13,5	12,4	13,6	14,3	14,0	13,8	12,9	13,35	13,78	13,3	13,2	13,5	14,3	12,76	14,52	14,60
65	11.1	9,8	10,6	11,3	11,2	11,0	10,1	10,38	10,67	10,6	10,5	10,8	11,5	—	—	11,48
70	8,7	7,6	8,2	8,6	8,7	8,5	7,7	7,85	8,07	8,1	8,1	8,5	9,0	7,96	9,06	8,91
75	6,4	5,8	6,4	6,5	6,6	6,5	5,7	5,87	6,05	6,2	6,2	6,5	6,9	—	—	6,75
80	4,5	4.3	4,9	4,7	4.9	4,8	4,1	4,33	4,45	4,8	4,7	4,9	5,3	4,42	5,34	5,05
85	3,2	2,6	3,8	3,2	3,6	3,4	2,9	—	—	3,9	4,1	3,7	4,0	—	—	—
90	2.2	1,4	2,9	1,8	2,7	2,1	2,0	—	—	3,2	3,2	2,8	3,0	—	—	—

XVI 5.

Aus: Ballod, C.: Die mittlere Lebensdauer in Stadt und Land. In: Staats- und socialwissenschaftliche Forschungen herausgegeben von Gustav Schmoller. Sechzehnter Band. Fünftes Heft. Leipzig 1899, S. 135 und 138.

Der zu Lichtensteig im Toggenburg (Schweiz) geborene Jost Bürgi (1522 - 1632) kam 1579 als Hofuhrmacher und astronomischer Instrumentenmacher an die Sternwarte des Landgrafen Wilhelm IV. zu Kassel. 1603 ging Bürgi nach Prag an den Hof Rudolph II. und wurde 1604 kaiserlicher Kammeruhrmacher. Bürgi gebrauchte zur Erleichterung der Rechenarbeit die Prosthaphaeresis, ein Rechenverfahren, das die Multiplikation und Division durch Addition und Subtraktion trigonometrischer Funktionen ersetzte. Das Wort Prosthaphaeresis ist ein Zusammenzug aus πρόσθεσις (Hinzufügen; Addition) und ἀφαίρεσις (Wegnahme). Bürgi suchte nach Hilfsmitteln, um komplizierte Rechnungen zu vereinfachen. Obwohl er seine „Progress Tabulen" bereits 1588 erdacht hatte, veröffentlichte er diese erst 1620 unter dem Titel „Aritmetische und Geometrische Progress Tabulen/sambt gründlichem unterricht/wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/und verstanden werden sol." Der im Titel von Bürgis Werk genannte „gründliche Unterricht" wurde erst 1856 aufgefunden (H. G. Zeuthen, 1901). Johannes Kepler (1571 - 1630) nannte Bürgi wegen seiner späten Drucklegung einen Cunctator (Zauderer). Die Fortschritte zur Erleichterung des Rechnens waren Kepler bekannt. 1624 wurde Keplers „Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos" in Marburg gedruckt.
Bildquelle: http://www.ethbib.ethz.ch/aktuell/galerie/buergi/buergi.jpg

Bildquellen:
www.math.tugraz.at/~predota/old/history/mathematiker/img/leibniz2.jpg sowie http://www.wu-wien.ac.at/inst/geschichte/computing/images/leibniz.jpg

Die versicherungswirtschaftlichen und finanzwissenschaftlichen Schriften des 1646 in Leipzig geborenen Gottfried Wilhelm Leibniz waren lange Zeit kaum bekannt. Leibniz, der letzte Polyhistor, entwarf eine Rechenmaschine für alle Grundrechenarbeiten. Leibniz beschäftigte noch ein weiterer Gedanke: Seine „Dyadik" oder binäre Arithmetik, d.h. die Darstellung aller Zahlen nur mit den Ziffern 0 und 1. Bedeutsam wurde das Zahlensystem mit der Grundzahl 2 später für die Computer. Erinnert sei in diesem Zusammenhang an Juan Caramuel Lobkowitz, der vor Leibniz in seiner 1670 erschienen „Mathesis biceps" über die binäre Darstellung von Zahlen schrieb. 1716 starb Leibniz in Hannover.

Bildquelle: http://th.physik.uni-frankfurt.de
/~jr/gif/phys/euler.jpg

Der bedeutende Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707 - 1783) beschäftigte sich im Zuge seiner Tätigkeit an der Akademie der Wissenschaften St. Petersburg und an der Akademie der Wissenschaften in Berlin auch mit Fragen der Kalkulation von Lebensversicherungen. Von ihm stammt u.a. die allgemeine Theorie der Logarithmen.

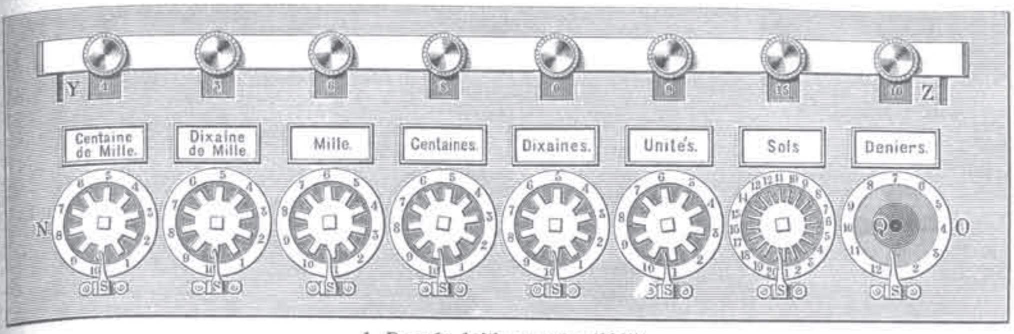
http://tom.pi-ahs.at/xtras/matheblick/gauss/gauss.html

Der große Mathematiker und Astronom Carl Friedrich Gauß, geboren 1777 in Braunschweig, hob schon die Bedeutung von Sterbetafeln hervor. Auf Wunsch des Senats der Universität Göttingen führte Gauß 1845 eine Untersuchung des Zustandes der 1739 gegründeten Professorenwitwenkasse durch. Vom „Meister der drei großen A“ (Arithmetik. Algebra und Analysis) wurde die Ausgleichsrechnung im Wesentlichen entwickelt. Seine „Disquisitiones arithmeticae“ erschien 1801. Gauß verstarb 1855 in Göttingen. Noch im selben Jahr ließ König Georg V., König von Hannover, eine Medaille prägen, mit der Gauß als „Fürst der Mathematiker“ (Georgius V Rex Hannoverae mathematicorum principi) geehrt wurde.

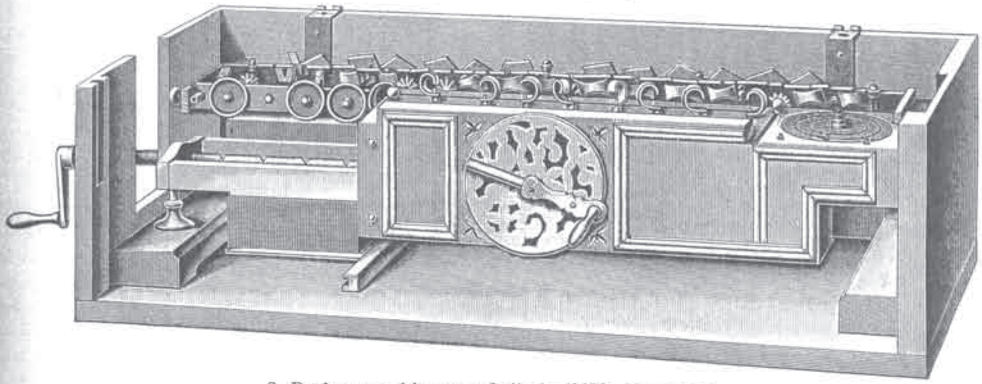
Bildquelle: http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/2005/gausscd/html/Gauss1803b.jpg

Vor der Einführung des Euro fand man auf der 10-DM-Note das Bildnis von Gauß nebst der Normalverteilungskurve, auch Glockenkurve oder Gauß‘sche Glocke genannt.

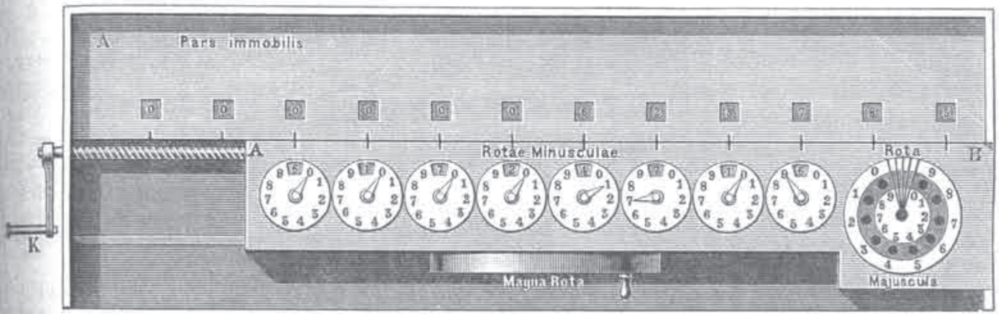
Rechenmaschinen I.



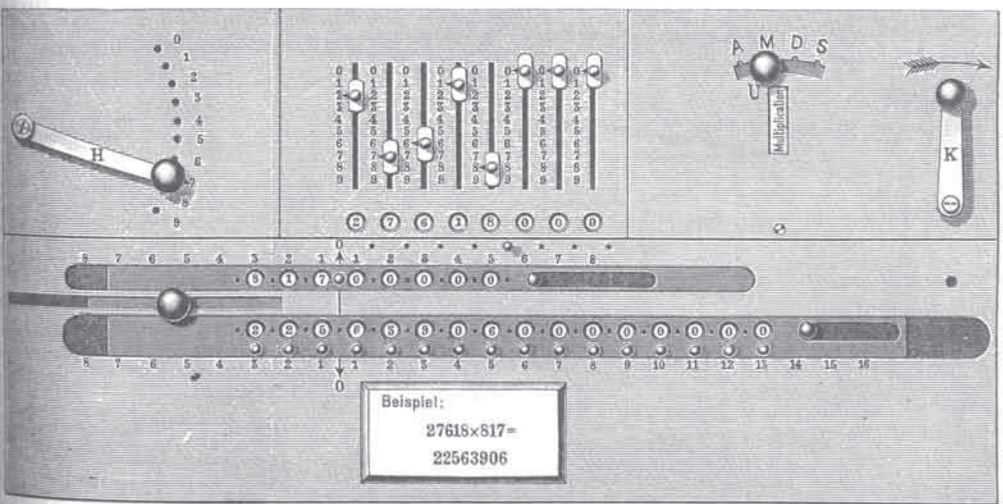
1. Pascals Arithmometer (1642).



2. Rechenmaschine von Leibniz (1673, Hannover).



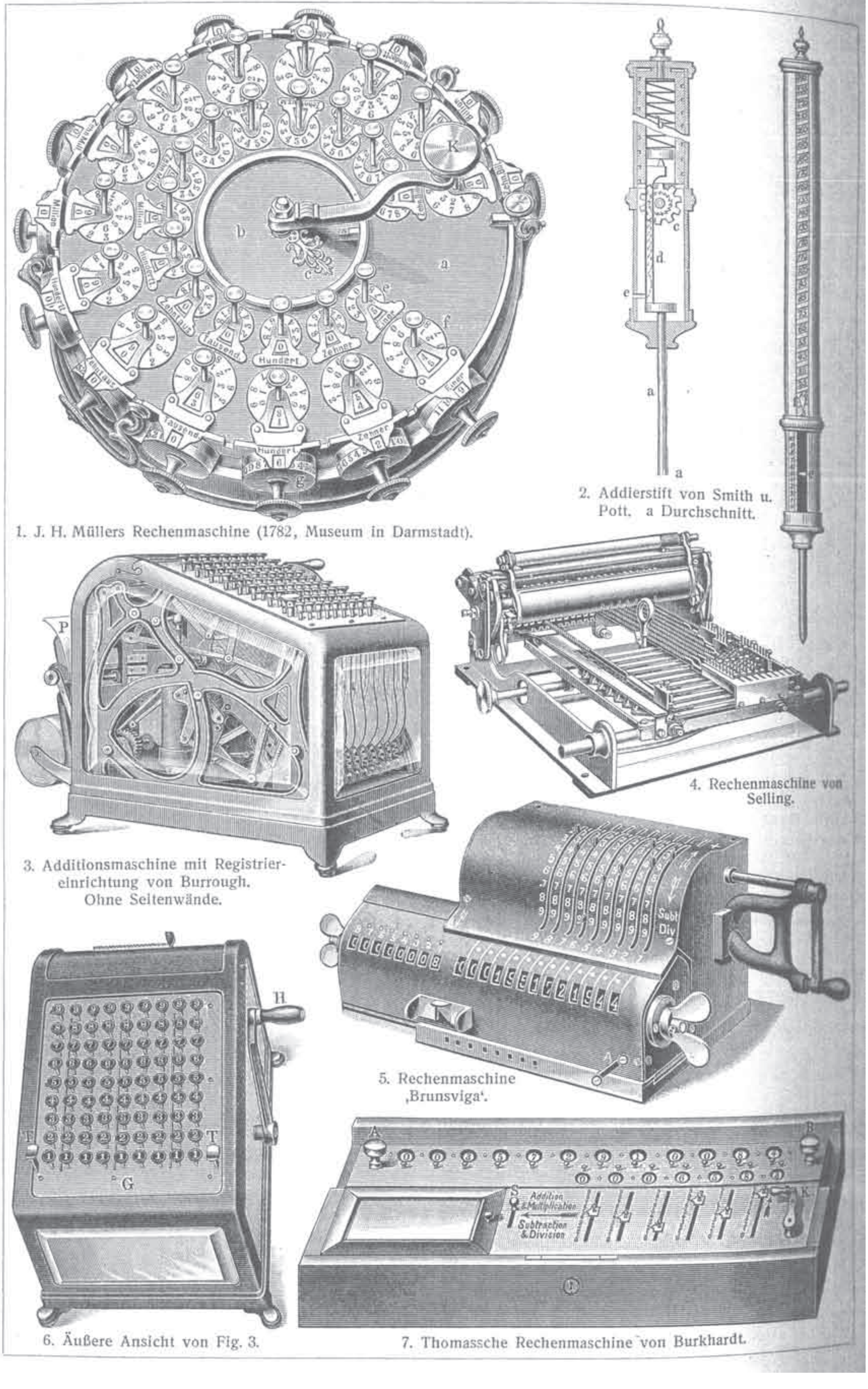
3. Leibnizsche Rechenmaschine, geometrische Zeichnung.



4. Rechenmaschine von Steiger u. Egli.

Meyers Konv.-Lexikon, 6. Aufl. Bibliograph. Institut, Leipzig. *Zum Artikel ‚Rechenmaschinen'.*

Rechenmaschinen II.



1. J. H. Müllers Rechenmaschine (1782, Museum in Darmstadt).

2. Addierstift von Smith u. Pott. a Durchschnitt.

3. Additionsmaschine mit Registriereinrichtung von Burrough. Ohne Seitenwände.

4. Rechenmaschine von Selling.

5. Rechenmaschine ‚Brunsviga‘.

6. Äußere Ansicht von Fig. 3.

7. Thomassche Rechenmaschine von Burkhardt.

Bayerische Sterbetafel 2003/05

Voll-endetes Alter in Jahren	Männliche Personen: Von 100 000 gleichzeitig Lebendgeborenen erreichen das Alter x (Überlebende im Alter x)	Männliche Personen: Von 100 000 gleichzeitig Lebendgeborenen sterben im Alter x bis unter x+1	Männliche Personen: Wahrscheinlichkeit für eine xjährige Person vom Alter x bis x+1 zu sterben (Sterbewahrscheinlichkeit)	Männliche Personen: Lebenserwartung in Jahren: Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebende Jahre	Männliche Personen: Lebenserwartung in Jahren: Mittlere Lebenserwartung im Alter x	Weibliche Personen: Von 100 000 gleichzeitig Lebendgeborenen erreichen das Alter x Jahren (Überlebende im Alter x)	Weibliche Personen: Von 100 000 gleichzeitig Lebendgeborenen sterben im Alter x bis unter x+1	Weibliche Personen: Wahrscheinlichkeit für eine xjährige Person vom Alter x bis x+1 zu sterben (Sterbewahrscheinlichkeit)	Weibliche Personen: Lebenserwartung in Jahren: Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebende Jahre	Weibliche Personen: Lebenserwartung in Jahren: Mittlere Lebenserwartung im Alter x
x	l_x	d_x	q_x	$e_x l_x$	e_x	l_x	d_x	q_x	$e_x l_x$	e_x
Monate		während eines Monats	für einen Monat				während eines Monats	für einen Monat		
0	100000	261	0,002609	7678467	76,78	100000	229	0,002288	8211406	82,11
1	99739	26	0,000262	7670153	76,90	99771	18	0,000180	8203089	82,22
2	99713	20	0,000204	7661842	76,84	99753	15	0,000155	8194775	82,15
3	99693	16	0,000160	7653533	76,77	99738	13	0,000132	8186463	82,08
4	99677	13	0,000128	7645226	76,70	99725	11	0,000112	8178152	82,01
5	99664	10	0,000103	7636920	76,63	99714	9	0,000093	8169842	81,93
6	99654	8	0,000084	7628615	76,55	99705	8	0,000077	8161533	81,86
7	99646	7	0,000070	7620311	76,47	99697	6	0,000063	8153225	81,78
8	99639	6	0,000058	7612007	76,40	99691	5	0,000051	8144917	81,70
9	99633	5	0,000049	7603704	76,32	99686	4	0,000040	8136610	81,62
10	99628	4	0,000042	7595401	76,24	99682	3	0,000032	8128303	81,54
11	99624	4	0,000037	7587099	76,16	99679	2	0,000025	8119996	81,46
Jahre		während eines Jahres	für ein Jahr				während eines Jahres	für ein Jahr		
0	100000	380	0,003800	7678467	76,78	100000	323	0,003230	8211406	82,11
1	99620	32	0,000320	7578797	76,08	99677	28	0,000282	8111689	81,38
2	99588	24	0,000240	7479193	75,10	99649	22	0,000222	8012026	80,40
3	99564	18	0,000180	7379617	74,12	99627	17	0,000169	7912388	79,42
4	99546	14	0,000144	7280062	73,13	99610	13	0,000129	7812769	78,43
5	99532	12	0,000122	7180523	72,14	99597	10	0,000105	7713166	77,44
6	99520	11	0,000108	7080997	71,15	99587	9	0,000091	7613574	76,45
7	99509	10	0,000103	6981483	70,16	99578	8	0,000083	7513991	75,46
8	99499	10	0,000105	6881979	69,17	99570	8	0,000079	7414417	74,46
9	99489	11	0,000107	6782485	68,17	99562	8	0,000077	7314851	73,47
10	99478	11	0,000108	6683001	67,18	99554	8	0,000076	7215293	72,48
11	99467	11	0,000112	6583529	66,19	99546	8	0,000080	7115743	71,48
12	99456	12	0,000123	6484067	65,20	99538	9	0,000089	7016201	70,49
13	99444	15	0,000152	6384617	64,20	99529	11	0,000111	6916668	69,49
14	99429	21	0,000212	6285181	63,21	99518	14	0,000142	6817144	68,50
15	99408	31	0,000311	6185762	62,23	99504	18	0,000178	6717633	67,51
16	99377	44	0,000444	6086370	61,25	99486	21	0,000212	6618138	66,52
17	99333	58	0,000588	5987015	60,27	99465	24	0,000246	6518663	65,54
18	99275	71	0,000712	5887711	59,31	99441	27	0,000274	6419210	64,55
19	99204	79	0,000794	5788471	58,35	99414	28	0,000286	6319782	63,57
20	99125	83	0,000834	5689307	57,40	99386	28	0,000285	6220382	62,59
21	99042	83	0,000842	5590223	56,44	99358	28	0,000278	6121010	61,61
22	98959	82	0,000829	5491223	55,49	99330	27	0,000274	6021666	60,62
23	98877	79	0,000802	5392305	54,54	99303	27	0,000271	5922350	59,64
24	98798	76	0,000772	5293467	53,58	99276	26	0,000264	5823060	58,66
25	98722	74	0,000746	5194707	52,62	99250	25	0,000256	5723797	57,67
26	98648	71	0,000723	5096022	51,66	99225	25	0,000249	5624560	56,68
27	98577	70	0,000708	4997410	50,70	99200	24	0,000243	5525347	55,70
28	98507	69	0,000701	4898868	49,73	99176	25	0,000248	5426159	54,71
29	98438	69	0,000703	4800395	48,77	99151	26	0,000265	5326996	53,73
30	98369	71	0,000718	4701992	47,80	99125	28	0,000284	5227858	52,74
31	98298	74	0,000748	4603658	46,83	99097	30	0,000301	5128747	51,75
32	98224	77	0,000782	4505397	45,87	99067	32	0,000323	5029665	50,77
33	98147	80	0,000816	4407212	44,90	99035	35	0,000354	4930614	49,79
34	98067	84	0,000859	4309105	43,94	99000	39	0,000394	4831596	48,80
35	97983	89	0,000911	4211080	42,98	98961	44	0,000446	4732616	47,82
36	97894	95	0,000971	4113141	42,02	98917	50	0,000507	4633677	46,84
37	97799	102	0,001044	4015295	41,06	98867	57	0,000577	4534785	45,87
38	97697	111	0,001136	3917547	40,10	98810	64	0,000648	4435946	44,89
39	97586	123	0,001257	3819905	39,14	98746	71	0,000720	4337168	43,92
40	97463	137	0,001409	3722381	38,19	98675	78	0,000795	4238458	42,95
41	97326	155	0,001593	3624986	37,25	98597	86	0,000873	4139822	41,99
42	97171	175	0,001802	3527738	36,30	98511	95	0,000964	4041268	41,02
43	96996	197	0,002034	3430654	35,37	98416	105	0,001071	3942804	40,06
44	96799	222	0,002290	3333757	34,44	98311	118	0,001201	3844441	39,10

Anmerkung: Wegen des großen zeitlichen Abstandes zur letzten Volkszählung (1987) und der geringen Besetzung bei den niederen und hohen Altersjahren sind die rohen Werte dieser Altersjahre weniger zuverlässig als bei anderen Altersjahren.

Noch: Bayerische Sterbetafel 2003/05

Vollendetes Alter in Jahren	Männliche Personen					Weibliche Personen				
	Von 100 000 gleichzeitig Lebendgeborenen		Wahrscheinlichkeit für eine xjährige Person vom Alter x bis x+1 zu sterben (Sterbewahrscheinlichkeit)	Lebenserwartung in Jahren		Von 100 000 gleichzeitig Lebendgeborenen		Wahrscheinlichkeit für eine xjährige Person vom Alter x bis x+1 zu sterben (Sterbewahrscheinlichkeit)	Lebenserwartung in Jahren	
	erreichen das Alter x (Überlebende im Alter x)	sterben im Alter x bis unter x+1		Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebende Jahre	Mittlere Lebenserwartung im Alter x	erreichen das Alter x Jahren (Überlebende im Alter x)	sterben im Alter x bis unter x+1		Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebende Jahre	Mittlere Lebenserwartung im Alter x
x	l_x	d_x	q_x	$e_x l_x$	e_x	l_x	d_x	q_x	$e_x l_x$	e_x
45	96577	248	0,002568	3237069	33,52	98193	133	0,001355	3746189	38,15
46	96329	275	0,002854	3140616	32,60	98060	150	0,001526	3648062	37,20
47	96054	302	0,003145	3044424	31,69	97910	166	0,001698	3550077	36,26
48	95752	331	0,003453	2948521	30,79	97744	183	0,001872	3452250	35,32
49	95421	362	0,003792	2852935	29,90	97561	200	0,002055	3354598	34,38
50	95059	397	0,004177	2757695	29,01	97361	219	0,002252	3257137	33,45
51	94662	438	0,004623	2662834	28,13	97142	240	0,002473	3159885	32,53
52	94224	483	0,005129	2568391	27,26	96902	263	0,002715	3062863	31,61
53	93741	531	0,005662	2474409	26,40	96639	286	0,002964	2966093	30,69
54	93210	580	0,006224	2380933	25,54	96353	310	0,003220	2869597	29,78
55	92630	630	0,006803	2288013	24,70	96043	337	0,003508	2773399	28,88
56	92000	680	0,007391	2195698	23,87	95706	367	0,003835	2677524	27,98
57	91320	731	0,008006	2104038	23,04	95339	398	0,004173	2582002	27,08
58	90589	787	0,008690	2013084	22,22	94941	427	0,004496	2486862	26,19
59	89802	850	0,009460	1922888	21,41	94514	454	0,004805	2392134	25,31
60	88952	916	0,010294	1833511	20,61	94060	482	0,005122	2297847	24,43
61	88036	984	0,011180	1745017	19,82	93578	511	0,005459	2204028	23,55
62	87052	1055	0,012124	1657473	19,04	93067	543	0,005832	2110706	22,68
63	85997	1134	0,013190	1570949	18,27	92524	579	0,006261	2017910	21,81
64	84863	1225	0,014434	1485519	17,50	91945	623	0,006772	1925676	20,94
65	83638	1327	0,015864	1401268	16,75	91322	674	0,007376	1834042	20,08
66	82311	1437	0,017463	1318294	16,02	90648	734	0,008101	1743057	19,23
67	80874	1559	0,019275	1236701	15,29	89914	806	0,008969	1652776	18,38
68	79315	1691	0,021317	1156607	14,58	89108	890	0,009985	1563265	17,54
69	77624	1830	0,023579	1078137	13,89	88218	986	0,011176	1474602	16,72
70	75794	1977	0,026085	1001428	13,21	87232	1098	0,012587	1386877	15,90
71	73817	2132	0,028878	926623	12,55	86134	1229	0,014273	1300194	15,10
72	71685	2294	0,031997	853872	11,91	84905	1377	0,016217	1214675	14,31
73	69391	2457	0,035406	783334	11,29	83528	1534	0,018369	1130458	13,53
74	66934	2615	0,039063	715171	10,68	81994	1704	0,020780	1047697	12,78
75	64319	2764	0,042979	649545	10,10	80290	1890	0,023542	966555	12,04
76	61555	2909	0,047262	586608	9,53	78400	2099	0,026773	887210	11,32
77	58646	3050	0,052005	526507	8,98	76301	2332	0,030559	809860	10,61
78	55596	3187	0,057323	469386	8,44	73969	2592	0,035045	734725	9,93
79	52409	3327	0,063478	415384	7,93	71377	2879	0,040337	662052	9,28
80	49082	3467	0,070647	364638	7,43	68498	3186	0,046510	592114	8,64
81	45615	3592	0,078748	317290	6,96	65312	3498	0,053559	525209	8,04
82	42023	3676	0,087480	273471	6,51	61814	3796	0,061404	461646	7,47
83	38347	3702	0,096546	233286	6,08	58018	4056	0,069913	401730	6,92
84	34645	3668	0,105875	196790	5,68	53962	4265	0,079031	345740	6,41
85	30977	3588	0,115827	163979	5,29	49697	4428	0,089093	293911	5,91
86	27389	3486	0,127269	134796	4,92	45269	4556	0,100649	246428	5,44
87	23903	3372	0,141060	109150	4,57	40713	4659	0,114435	203437	5,00
88	20531	3230	0,157301	86933	4,23	36054	4712	0,130692	165053	4,58
89	17301	3033	0,175291	68017	3,93	31342	4675	0,149151	131355	4,19
90	14268	2767	0,193904	52232	3,66	26667	4523	0,169599	102351	3,84
91	11501	2435	0,211724	39348	3,42	22144	4239	0,191438	77945	3,52
92	9066	2064	0,227690	29064	3,21	17905	3830	0,213907	57921	3,23
93	7002	1697	0,242379	21030	3,00	14075	3330	0,236557	41931	2,98
94	5305	1397	0,263339	14877	2,80	10745	2787	0,259357	29521	2,75
95	3908	1103	0,282333	10270	2,63	7958	2249	0,282580	20169	2,53
96	2805	847	0,301794	6914	2,46	5709	1748	0,306245	13336	2,34
97	1958	630	0,321722	4532	2,31	3961	1330	0,335821	8501	2,15
98	1328	454	0,342117	2889	2,18	2631	958	0,364059	5205	1,98
99	874	317	0,362980	1788	2,05	1673	658	0,393440	3053	1,82
100	557	214	0,384311	1073	1,93	1015	430	0,423964	1709	1,68

Anhang 1 zur bayerischen

Ausgangswerte zur Berechnung der rohen Sterbewahrscheinlichkeit,

Vollendetes Alter in Jahren	Männliche Personen						
	Gestorbene	Nenner-gesamtheit	Rohe Sterbe-wahrschein-lichkeit	Geschätzte Standard-abweichung	Ausgeglichene Sterbewahr-scheinlichkeit	Betrag der dritten Differenzen der q_x	Fehlerquotient
x	M_x	N_x	$\bar{q}_x$	s_x	q_x	$\lvert\Delta^3 q_x\rvert$	$r_x = (q_x - \bar{q}_x) / s_x$
0	649	171055,0	0,003794	0,000149	0,003800	X	X
1	72	175142,0	0,000411	0,000048	0,000320	X	-1,90
2	28	179852,0	0,000156	0,000029	0,000240	X	2,90
3	23	185507,0	0,000124	0,000026	0,000180	X	2,15
4	32	191270,0	0,000167	0,000030	0,000144	0,000004	-0,77
5	31	196640,0	0,000158	0,000028	0,000122	0,000010	-1,29
6	18	200174,0	0,000090	0,000021	0,000108	0,000006	0,86
7	16	201368,0	0,000079	0,000020	0,000103	0,000001	1,20
8	27	201104,0	0,000134	0,000026	0,000105	0,000002	-1,12
9	25	202632,5	0,000123	0,000025	0,000107	0,000007	-0,64
10	22	206785,0	0,000106	0,000023	0,000108	0,000001	0,09
11	31	212222,5	0,000146	0,000026	0,000112	0,000004	-1,31
12	27	217305,5	0,000124	0,000024	0,000123	0,000004	-0,04
13	30	220356,5	0,000136	0,000025	0,000152	0,000011	0,64
14	39	221492,5	0,000176	0,000028	0,000212	0,000013	1,29
15	46	219615,5	0,000209	0,000031	0,000311	0,000008	3,29
16	94	216435,0	0,000434	0,000045	0,000444	0,000005	0,22
17	127	211922,5	0,000599	0,000053	0,000588	0,000023	-0,21
18	173	207228,5	0,000835	0,000063	0,000712	0,000031	-1,95
19	168	206436,5	0,000814	0,000063	0,000794	0,000022	-0,32
20	176	209974,5	0,000838	0,000063	0,000834	0,000000	-0,06
21	177	215780,0	0,000820	0,000062	0,000842	0,000010	0,35
22	190	220498,5	0,000862	0,000062	0,000829	0,000011	-0,53
23	170	222645,5	0,000764	0,000059	0,000802	0,000007	0,64
24	167	221557,0	0,000754	0,000058	0,000772	0,000011	0,31
25	168	219261,5	0,000766	0,000059	0,000746	0,000007	-0,34
26	154	218702,0	0,000704	0,000057	0,000723	0,000001	0,33
27	156	219121,0	0,000712	0,000057	0,000708	0,000005	-0,07
28	157	220289,0	0,000713	0,000057	0,000701	0,000000	-0,21
29	157	222333,5	0,000706	0,000056	0,000703	0,000001	-0,05
30	148	228406,5	0,000648	0,000053	0,000718	0,000004	1,32
31	186	241111,5	0,000771	0,000057	0,000748	0,000002	-0,40
32	225	259417,5	0,000867	0,000058	0,000782	0,000011	-1,47
33	210	280319,5	0,000749	0,000052	0,000816	0,000004	1,29
34	262	300047,0	0,000873	0,000054	0,000859	0,000009	-0,26
35	289	317272,0	0,000911	0,000054	0,000911	0,000000	0,00
36	331	330014,0	0,001003	0,000055	0,000971	0,000001	-0,58
37	355	337070,0	0,001053	0,000056	0,001044	0,000005	-0,16
38	372	341103,5	0,001091	0,000057	0,001136	0,000006	0,79
39	433	342634,0	0,001264	0,000061	0,001257	0,000010	-0,11
40	468	340522,0	0,001374	0,000063	0,001409	0,000002	0,56
41	536	334805,0	0,001601	0,000069	0,001593	0,000001	-0,12
42	603	326879,0	0,001845	0,000075	0,001802	0,000007	-0,57
43	637	318086,0	0,002003	0,000079	0,002034	0,000002	0,39
44	687	307516,5	0,002234	0,000085	0,002290	0,000001	0,66
45	774	296674,5	0,002609	0,000094	0,002568	0,000002	-0,44
46	842	286253,5	0,002941	0,000101	0,002854	0,000014	-0,86
47	861	275241,0	0,003128	0,000106	0,003145	0,000003	0,16
48	916	264416,5	0,003464	0,000114	0,003453	0,000012	-0,10
49	964	254100,5	0,003794	0,000122	0,003792	0,000014	-0,02
50	1021	245996,5	0,004150	0,000130	0,004177	0,000015	0,21
51	1057	241162,0	0,004383	0,000135	0,004623	0,000015	1,78
52	1293	238827,0	0,005414	0,000150	0,005129	0,000001	-1,90
53	1311	237836,0	0,005512	0,000152	0,005662	0,000033	0,99
54	1474	235581,5	0,006257	0,000162	0,006224	0,000002	-0,20
55	1598	231436,5	0,006905	0,000172	0,006803	0,000012	-0,59
56	1675	222428,5	0,007531	0,000183	0,007391	0,000008	-0,77
57	1615	205125,0	0,007873	0,000195	0,008006	0,000018	0,68
58	1632	191828,5	0,008508	0,000210	0,008690	0,000042	0,87
59	1826	191605,5	0,009530	0,000222	0,009460	0,000017	-0,32
60	2071	200759,5	0,010316	0,000226	0,010294	0,000022	-0,10
61	2459	213879,0	0,011497	0,000231	0,011180	0,000012	-1,37
62	2756	228294,5	0,012072	0,000229	0,012124	0,000006	0,23
63	3175	244882,0	0,012965	0,000229	0,013190	0,000064	0,98
64	3569	250298,0	0,014259	0,000237	0,014434	0,000056	0,74
65	3888	238686,0	0,016289	0,000259	0,015864	0,000008	-1,64
66	3804	220492,0	0,017252	0,000277	0,017463	0,000017	0,76
67	3891	203653,0	0,019106	0,000303	0,019275	0,000044	0,56
68	4089	189575,0	0,021569	0,000334	0,021317	0,000017	-0,75
69	4087	173374,0	0,023573	0,000364	0,023579	0,000010	0,02
70	4092	156170,0	0,026202	0,000404	0,026085	0,000024	-0,29
71	4053	142768,0	0,028389	0,000440	0,028878	0,000043	1,11
72	4392	136917,0	0,032078	0,000476	0,031997	0,000039	-0,17
73	4779	134506,0	0,035530	0,000505	0,035406	0,000036	-0,25
74	5234	132104,5	0,039620	0,000537	0,039063	0,000042	-1,04
75	5383	125842,0	0,042776	0,000570	0,042979	0,000011	0,36
76	5513	116789,5	0,047205	0,000621	0,047262	0,000108	0,09
77	5598	105726,0	0,052948	0,000689	0,052005	0,000093	-1,37
78	5301	93203,5	0,056876	0,000759	0,057323	0,000115	0,59
79	5110	81888,5	0,062402	0,000845	0,063478	0,000262	1,27
80	5106	73300,5	0,069658	0,000940	0,070647	0,000177	1,05
81	5365	68066,5	0,078820	0,001033	0,078748	0,000082	-0,07
82	5639	63847,0	0,088321	0,001123	0,087480	0,000301	-0,75
83	5527	56311,0	0,098151	0,001254	0,096546	0,000297	-1,28
84	4778	44138,0	0,108251	0,001479	0,105875	0,000071	-1,61
85	3622	31210,5	0,116051	0,001813	0,115827	0,000360	-0,12
86	2764	22324,0	0,123813	0,002204	0,127269	0,000867	1,57
87	2584	18762,0	0,137725	0,002516	0,141060	0,000859	1,33
88	2883	18467,5	0,156112	0,002671	0,157301	0,000101	0,45
89	3167	18209,0	0,173925	0,002809	0,175291	0,000701	0,49
90	3204	16510,5	0,194058	0,003078	0,193904	0,001126	-0,05
91	2948	13375,5	0,220403	0,003584	0,211724	0,001416	-2,42
92	2274	9911,0	0,229442	0,004224	0,227690	0,001061	-0,41
93	1678	7070,5	0,237324	0,005060	0,242379	0,000577	1,00

Sterbetafel 2003/05

ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeit, Maßzahlen für die Beurteilung der Ausgleichung

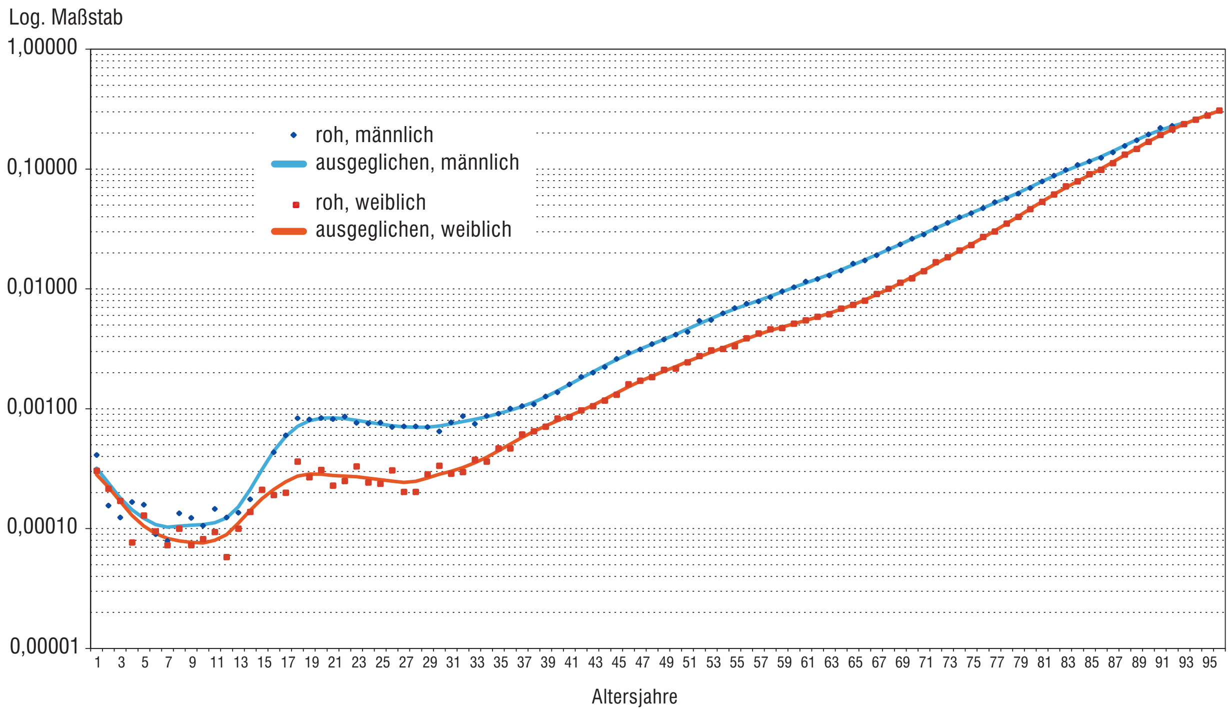
Vollendetes Alter in Jahren	Weibliche Personen						
	Gestorbene	Nenner-gesamtheit	Rohe Sterbe-wahrschein-lichkeit	Geschätzte Standard-abweichung	Ausgeglichene Sterbewahr-scheinlichkeit	Betrag der dritten Differenzen der q_x	Fehlerquotient
x	M_x	N_x	$\bar{q}_x$	s_x	q_x	$\lvert\Delta^3 q_x\rvert$	$r_x = (q_x - \bar{q}_x) / s_x$
0	528	163503,0	0,003229	0,000140	0,003230	X	X
1	51	167039,0	0,000305	0,000043	0,000282	X	-0,53
2	37	171038,5	0,000216	0,000036	0,000222	X	0,17
3	30	175873,5	0,000171	0,000031	0,000169	X	-0,06
4	14	181063,5	0,000077	0,000021	0,000129	0,000006	2,48
5	24	186021,0	0,000129	0,000026	0,000105	0,000003	-0,92
6	18	189412,0	0,000095	0,000022	0,000091	0,000006	-0,18
7	14	190764,5	0,000073	0,000020	0,000083	0,000004	0,50
8	19	190236,5	0,000100	0,000023	0,000079	0,000002	-0,91
9	14	191357,0	0,000073	0,000020	0,000077	0,000002	0,20
10	16	196019,0	0,000082	0,000020	0,000076	0,000001	-0,30
11	19	201540,5	0,000094	0,000022	0,000080	0,000004	-0,64
12	12	206331,0	0,000058	0,000017	0,000089	0,000000	1,82
13	21	209103,5	0,000100	0,000022	0,000111	0,000008	0,50
14	29	210098,5	0,000138	0,000026	0,000142	0,000004	0,15
15	44	208068,0	0,000211	0,000032	0,000178	0,000004	-1,03
16	39	204209,0	0,000191	0,000031	0,000212	0,000007	0,68
17	40	200333,5	0,000200	0,000032	0,000246	0,000002	1,44
18	72	198045,5	0,000364	0,000043	0,000274	0,000006	-2,09
19	54	201090,5	0,000269	0,000037	0,000286	0,000010	0,46
20	64	207278,0	0,000309	0,000039	0,000285	0,000003	-0,62
21	49	214222,5	0,000229	0,000033	0,000278	0,000007	1,48
22	55	220425,5	0,000250	0,000034	0,000274	0,000009	0,71
23	74	223368,0	0,000331	0,000038	0,000271	0,000002	-1,58
24	54	222223,0	0,000243	0,000033	0,000264	0,000005	0,64
25	52	219697,5	0,000237	0,000033	0,000256	0,000003	0,58
26	67	218018,5	0,000307	0,000038	0,000249	0,000002	-1,53
27	44	217064,5	0,000203	0,000031	0,000243	0,000000	1,29
28	44	217185,0	0,000203	0,000031	0,000248	0,000010	1,45
29	62	218592,5	0,000284	0,000036	0,000265	0,000001	-0,53
30	75	224100,0	0,000335	0,000039	0,000284	0,000010	-1,31
31	68	236078,5	0,000288	0,000035	0,000301	0,000004	0,37
32	75	252590,0	0,000297	0,000034	0,000323	0,000007	0,76
33	102	271114,0	0,000376	0,000037	0,000354	0,000004	-0,59
34	105	288260,0	0,000364	0,000036	0,000394	0,000000	0,83
35	142	303327,5	0,000468	0,000039	0,000446	0,000003	-0,56
36	147	314251,0	0,000468	0,000039	0,000507	0,000003	1,00
37	196	319951,0	0,000613	0,000044	0,000577	0,000000	-0,82
38	210	322616,0	0,000651	0,000045	0,000648	0,000008	-0,07
39	230	324063,0	0,000710	0,000047	0,000720	0,000000	0,21
40	269	323297,0	0,000832	0,000051	0,000795	0,000002	-0,73
41	273	320145,0	0,000853	0,000052	0,000873	0,000000	0,38
42	305	313762,5	0,000972	0,000056	0,000964	0,000010	-0,14
43	322	305543,5	0,001054	0,000059	0,001071	0,000003	0,29
44	347	295417,5	0,001175	0,000063	0,001201	0,000007	0,41
45	373	284546,5	0,001311	0,000068	0,001355	0,000001	0,65
46	440	274711,0	0,001602	0,000076	0,001526	0,000007	-1,00
47	456	265450,5	0,001718	0,000080	0,001698	0,000016	-0,25
48	473	256998,5	0,001840	0,000085	0,001872	0,000001	0,38
49	528	249635,5	0,002115	0,000092	0,002055	0,000007	-0,65
50	531	245025,5	0,002167	0,000094	0,002252	0,000005	0,90
51	592	242249,0	0,002444	0,000100	0,002473	0,000010	0,29
52	664	240480,0	0,002761	0,000107	0,002715	0,000003	-0,43
53	736	239238,5	0,003076	0,000113	0,002964	0,000014	-0,99
54	746	235935,0	0,003162	0,000116	0,003220	0,000000	0,50
55	770	230860,5	0,003335	0,000120	0,003508	0,000025	1,44
56	859	221635,5	0,003876	0,000132	0,003835	0,000007	-0,31
57	871	204756,5	0,004254	0,000144	0,004173	0,000028	-0,56
58	883	191817,5	0,004603	0,000155	0,004496	0,000026	-0,69
59	904	191192,5	0,004728	0,000157	0,004805	0,000001	0,49
60	1029	200077,0	0,005143	0,000160	0,005122	0,000022	-0,13
61	1174	214354,5	0,005477	0,000159	0,005459	0,000012	-0,11
62	1362	231816,5	0,005875	0,000159	0,005832	0,000016	-0,27
63	1553	252358,5	0,006154	0,000156	0,006261	0,000020	0,69
64	1797	261407,0	0,006874	0,000162	0,006772	0,000026	-0,63
65	1860	252421,0	0,007369	0,000170	0,007376	0,000011	0,04
66	1890	236858,0	0,007979	0,000183	0,008101	0,000028	0,67
67	2027	223034,5	0,009088	0,000201	0,008969	0,000022	-0,59
68	2126	211889,5	0,010034	0,000217	0,009985	0,000005	-0,23
69	2224	197278,5	0,011273	0,000238	0,011176	0,000027	-0,41
70	2223	181100,0	0,012275	0,000259	0,012587	0,000045	1,20
71	2390	169878,5	0,014069	0,000286	0,014273	0,000055	0,71
72	2803	167490,5	0,016735	0,000313	0,016217	0,000017	-1,65
73	3102	168692,0	0,018389	0,000327	0,018369	0,000050	-0,06
74	3551	169253,0	0,020980	0,000348	0,020780	0,000051	-0,57
75	3856	165979,0	0,023232	0,000370	0,023542	0,000092	0,84
76	4449	163501,0	0,027211	0,000402	0,026773	0,000118	-1,09
77	4900	162035,0	0,030240	0,000425	0,030559	0,000086	0,75
78	5630	160439,0	0,035091	0,000459	0,035045	0,000145	-0,10
79	6276	157014,5	0,039971	0,000494	0,040337	0,000106	0,74
80	7057	152413,5	0,046302	0,000538	0,046510	0,000075	0,39
81	7929	148542,0	0,053379	0,000583	0,053559	0,000005	0,31
82	8843	144151,0	0,061345	0,000632	0,061404	0,000080	0,09
83	9467	131924,5	0,071761	0,000711	0,069913	0,000132	-2,60
84	8489	107161,0	0,079217	0,000825	0,079031	0,000055	-0,23
85	7097	78406,5	0,090515	0,001025	0,089093	0,000335	-1,39
86	5655	57435,5	0,098458	0,001243	0,100649	0,000550	1,76
87	5624	50117,0	0,112217	0,001410	0,114435	0,000736	1,57
88	6817	51636,5	0,132019	0,001490	0,130692	0,000241	-0,89
89	7811	53087,0	0,147136	0,001537	0,149151	0,000269	1,31
90	8510	50359,0	0,168987	0,001670	0,169599	0,000213	0,37
91	8056	41795,5	0,192748	0,001929	0,191438	0,000598	-0,68
92	6949	32283,5	0,215249	0,002287	0,213907	0,000761	-0,59
93	5736	24109,0	0,237919	0,002742	0,236557	0,000449	-0,50
94	4565	17672,0	0,258318	0,003293	0,259357	0,000031	0,32
95	3504	12487,0	0,280612	0,004021	0,282580	0,000273	0,49
96	2724	8844,5	0,307988	0,004909	0,306245	0,000019	-0,36

Anhang 2 zur bayerischen Sterbetafel 2003/05

Ausgangswerte zur Berechnung der Säuglingssterblichkeit nach Monaten
sowie rohe und ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeit

Vollendetes Alter in Monaten	Männliche Personen				Weibliche Personen			
	Gestorbene (Zähler-gesamtheit)	Lebende (Nenner-gesamtheit)	Rohe Sterbe-wahrschein-lichkeit	Ausgeglichene Sterbewahr-scheinlichkeit	Gestorbene (Zähler-gesamtheit)	Lebende (Nenner-gesamtheit)	Rohe Sterbe-wahrschein-lichkeit	Ausgeglichene Sterbewahr-scheinlichkeit
x	Z_x	N_x	$\bar{q}_x$	q_x	Z_x	N_x	$\bar{q}_x$	q_x
0	441	169054,0	0,002609	0,002609	369	161276,5	0,002288	0,002288
1	51	168883,0	0,000302	0,000262	38	161145,5	0,000236	0,000180
2	36	169099,0	0,000213	0,000204	22	161401,0	0,000136	0,000155
3	20	169290,5	0,000118	0,000160	16	161723,5	0,000099	0,000132
4	18	169430,5	0,000106	0,000128	18	161943,5	0,000111	0,000112
5	21	169634,0	0,000124	0,000103	16	162234,0	0,000099	0,000093
6	17	169827,0	0,000100	0,000084	10	162459,0	0,000062	0,000077
7	14	170052,0	0,000082	0,000070	13	162609,0	0,000080	0,000063
8	7	170327,5	0,000041	0,000058	9	162879,0	0,000055	0,000051
9	8	170591,0	0,000047	0,000049	9	163303,0	0,000055	0,000040
10	11	170818,0	0,000064	0,000042	4	163634,0	0,000024	0,000032
11	5	171119,0	0,000029	0,000037	4	163818,5	0,000024	0,000025

Rohe und ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeiten der bayerischen Sterbetafel 2003/05



Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte einer lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbaren Rente
— Basis: Bayerische Sterbetafel 2003/05, Zinssatz 3 % —

	Männliche Personen				Weibliche Personen			
x [1]	l_x [2]	D_x [3]	N_x [4]	$ä_x$ [5]	l_x [2]	D_x [3]	N_x [4]	$ä_x$ [5]
0	100000	100000	3036861	30,37	100000	100000	3101379	31,01
1	99620	96718	2936861	30,37	99677	96774	3001379	31,01
2	99588	93871	2840143	30,26	99649	93929	2904605	30,92
3	99564	91115	2746271	30,14	99627	91173	2810676	30,83
4	99546	88445	2655156	30,02	99610	88502	2719504	30,73
5	99532	85857	2566711	29,90	99597	85913	2631001	30,62
6	99520	83346	2480854	29,77	99587	83403	2545088	30,52
7	99509	80910	2397507	29,63	99578	80966	2461686	30,40
8	99499	78545	2316597	29,49	99570	78601	2380720	30,29
9	99489	76250	2238052	29,35	99562	76306	2302118	30,17
10	99478	74021	2161802	29,21	99554	74078	2225812	30,05
11	99467	71857	2087781	29,05	99546	71914	2151735	29,92
12	99456	69756	2015924	28,90	99538	69814	2079820	29,79
13	99444	67717	1946167	28,74	99529	67774	2010006	29,66
14	99429	65734	1878451	28,58	99518	65793	1942232	29,52
15	99408	63806	1812717	28,41	99504	63868	1876439	29,38
16	99377	61928	1748910	28,24	99486	61996	1812571	29,24
17	99333	60098	1686982	28,07	99465	60178	1750575	29,09
18	99275	58314	1626884	27,90	99441	58411	1690397	28,94
19	99204	56575	1568570	27,73	99414	56694	1631986	28,79
20	99125	54883	1511996	27,55	99386	55028	1575291	28,63
21	99042	53240	1457113	27,37	99358	53410	1520264	28,46
22	98959	51646	1403873	27,18	99330	51840	1466854	28,30
23	98877	50100	1352227	26,99	99303	50316	1415014	28,12
24	98798	48602	1302126	26,79	99276	48837	1364698	27,94
25	98722	47150	1253524	26,59	99250	47402	1315861	27,76
26	98648	45743	1206374	26,37	99225	46010	1268459	27,57
27	98577	44378	1160632	26,15	99200	44659	1222449	27,37
28	98507	43055	1116253	25,93	99176	43348	1177790	27,17
29	98438	41772	1073198	25,69	99151	42074	1134442	26,96
30	98369	40527	1031426	25,45	99125	40838	1092368	26,75
31	98298	39318	990900	25,20	99097	39638	1051530	26,53
32	98224	38144	951582	24,95	99067	38471	1011892	26,30
33	98147	37004	913438	24,68	99035	37339	973421	26,07
34	98067	35897	876434	24,42	99000	36238	936082	25,83
35	97983	34822	840537	24,14	98961	35169	899844	25,59
36	97894	33777	805715	23,85	98917	34130	864674	25,34
37	97799	32761	771939	23,56	98867	33119	830545	25,08
38	97697	31774	739178	23,26	98810	32136	797426	24,81
39	97586	30813	707404	22,96	98746	31179	765291	24,54
40	97463	29878	676591	22,65	98675	30250	734111	24,27
41	97326	28967	646713	22,33	98597	29345	703862	23,99
42	97171	28078	617746	22,00	98511	28466	674516	23,70
43	96996	27212	589668	21,67	98416	27610	646051	23,40
44	96799	26365	562456	21,33	98311	26777	618441	23,10
45	96577	25539	536091	20,99	98193	25966	591664	22,79
46	96329	24731	510552	20,64	98060	25176	565698	22,47
47	96054	23942	485821	20,29	97910	24405	540522	22,15
48	95752	23172	461879	19,93	97744	23654	516117	21,82
49	95421	22419	438707	19,57	97561	22922	492463	21,48

	Männliche Personen				Weibliche Personen			
x [1]	l_x [2]	D_x [3]	N_x [4]	$ä_x$ [5]	l_x [2]	D_x [3]	N_x [4]	$ä_x$ [5]
50	95059	21684	416287	19,20	97361	22209	469541	21,14
51	94662	20964	394604	18,82	97142	21513	447332	20,79
52	94224	20259	373640	18,44	96902	20835	425819	20,44
53	93741	19568	353380	18,06	96639	20173	404984	20,08
54	93210	18891	333812	17,67	96353	19528	384811	19,71
55	92630	18227	314921	17,28	96043	18898	365283	19,33
56	92000	17575	296694	16,88	95706	18283	346385	18,95
57	91320	16937	279119	16,48	95339	17683	328101	18,55
58	90589	16312	262182	16,07	94941	17096	310419	18,16
59	89802	15700	245869	15,66	94514	16523	293323	17,75
60	88952	15098	230170	15,24	94060	15965	276799	17,34
61	88036	14507	215072	14,82	93578	15421	260834	16,91
62	87052	13927	200564	14,40	93067	14890	245413	16,48
63	85997	13358	186637	13,97	92524	14372	230524	16,04
64	84863	12798	173279	13,54	91945	13866	216152	15,59
65	83638	12246	160481	13,11	91322	13371	202286	15,13
66	82311	11700	148235	12,67	90648	12886	188915	14,66
67	80874	11161	136535	12,23	89914	12409	176030	14,19
68	79315	10627	125374	11,80	89108	11939	163621	13,70
69	77624	10098	114746	11,36	88218	11476	151681	13,22
70	75794	9573	104649	10,93	87232	11017	140205	12,73
71	73817	9051	95076	10,50	86134	10562	129188	12,23
72	71685	8534	86025	10,08	84905	10108	118627	11,74
73	69391	8020	77491	9,66	83528	9654	108519	11,24
74	66934	7511	69471	9,25	81994	9201	98865	10,75
75	64319	7007	61960	8,84	80290	8747	89664	10,25
76	61555	6511	54952	8,44	78400	8293	80917	9,76
77	58646	6022	48442	8,04	76301	7835	72624	9,27
78	55596	5543	42419	7,65	73969	7375	64789	8,79
79	52409	5073	36876	7,27	71377	6909	57414	8,31
80	49082	4613	31803	6,89	68498	6437	50505	7,85
81	45615	4162	27191	6,53	65312	5959	44068	7,40
82	42023	3723	23029	6,19	61814	5476	38109	6,96
83	38347	3298	19306	5,85	58018	4990	32633	6,54
84	34645	2893	16008	5,53	53962	4506	27643	6,14
85	30977	2511	13116	5,22	49697	4029	23138	5,74
86	27389	2156	10604	4,92	45269	3563	19109	5,36
87	23903	1826	8449	4,63	40713	3111	15546	5,00
88	20531	1523	6622	4,35	36054	2675	12435	4,65
89	17301	1246	5099	4,09	31342	2257	9760	4,32
90	14268	998	3853	3,86	26667	1865	7503	4,02
91	11501	781	2855	3,66	22144	1503	5638	3,75
92	9066	598	2074	3,47	17905	1180	4135	3,50
93	7002	448	1477	3,30	14075	901	2955	3,28
94	5305	330	1029	3,12	10745	668	2054	3,08

1 Vollendetes Alter x.
2 Überlebende im Alter x.
3 Diskontierte Zahl der Lebenden des Alters x.
4 Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden.
5 $ä_x = N_x / D_x$, Barwert der sofort beginnenden und lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente "1" für eine x-jährige Person (lebenslängliche Leibrente).

Ausgewählte Veröffentlichungen des Bayerischen Landesamts für Statistik und Datenverarbeitung

Altersstruktur der Bevölkerung Bayerns (A I 3)

Gestorbene in Bayern nach Todesursachen, Geschlecht und Altersgruppen (A IV 3)

Statistisches Jahrbuch für Bayern 2007 (50. Jahrgang). Umfassendes Kompendium amtlicher statistischer Daten auf fast 600 Seiten in tabellarischer und grafischer Form (Ausgabe 2008 erscheint Ende 2008).

Bayern in Zahlen - Zeitschrift des Bayerischen Landesamts für Statistik und Datenverarbeitung (monatlich)

Zum 200. Jahr der amtlichen Statistik in Bayern erschien im Maiheft 2008 von „Bayern in Zahlen“ der Beitrag „Methoden und technische Hilfsmittel in der Statistik - ein historischer Abriss“.

Bestellung von Veröffentlichungen
Telefon: 089 2119 -205
Fax: 098 2119 -457
E-Mail: vertrieb@statistik.bayern.de

Erwerb in unserer Vertriebsstelle im Hause (Zimmer 108):
Öffnungszeiten
Montag bis Freitag 9.00 bis 12.00 Uhr
Mittwoch 13.00 bis 17.00 Uhr
sowie nach Vereinbarung.

Bibliothek (Zimmer 341)
Unsere Präsenzbibliothek ist eine der ältesten und größten statistischen Spezialbibliotheken in Deutschland mit mehr als 100 000 Bänden. Eine besondere Spezialität ist unser reichhaltiger Altbestand aus dem 19. Jahrhundert, eine Fundgrube statistischer Kostbarkeiten. Neben den historischen Statistiken stehen Ihnen die einschlägigen Quellenwerke der amtlichen Statistik des In- und Auslands, Statistiken anderer Institutionen, Literatur zu statistischen Methoden, Standardwerke der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften sowie ca. 200 laufende Fachzeitschriften (auch zur Informations- und Kommunikationstechnik) zur Verfügung.

Öffnungszeiten:
Montag bis Freitag 9.00 bis 12.00 Uhr
Mittwoch 13.00 bis 17.00 Uhr
sowie nach Vereinbarung
Tel. 089 2119 -337

Bayerisches Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung
Neuhauser Straße 8, 80331 München

II. Entwickelung der Lebensversicherung bei den deutschen Anstalten 1829—1894.

Jahr	Zahl d. Anstalten	Neuer Bruttozugang im Laufe des Jahres: Personen resp. Policen	Neuer Bruttozugang im Laufe des Jahres: Versicherungssumme Mk.	Bestand am Ende des Jahres: Personen resp. Policen	Bestand am Ende des Jahres: Versicherungssumme Mk.	Bestand am Ende des Jahres: Durchschnitt p. Person resp. Police Mk.	Reinzuwachs im Laufe des Jahres, absolut: Personen resp. Policen	Reinzuwachs im Laufe des Jahres, absolut: Versicherungssumme Mk.	Reinzuwachs in % des Bestandes am Anfange des Jahres: Personen resp. Policen	Reinzuwachs in % des Bestandes am Anfange des Jahres: Summe
1829	2	1462	8128140	1448	8077200	5578	1448	8077200	—	—
1830	2	669	3991890	2072	11768199	5680	624	3690990	43,09	45,70
1835	4	1612	7251186	9274	43701639	4712	1217	5058294	15,10	13,09
1840	6	2794	10150936	19852	83320333	4197	1874	6496295	10,42	8,40
1845	7	2762	10085120	28463	115372872	4053	1533	5137279	5,69	4,60
1850	10	4101	13566750	36955	142807010	3864	2221	6165370	6,39	4,51
1855	17	8144	28038996	54333	198693645	3657	6565	19304361	13,74	10,70
1860	19	12274	40553244	88507	315655473	3566	7612	26234400	9,41	9,06
1865	22	50538	125935812	200627	623001195	3105	36687	87277944	22,38	16,20
1870	28	44036	118169535	348930	1007725017	2888	10741	35157837	3,18	3,61
1875	37	67086	242555347	508519	1622672300	3191	32271	140272780	6,78	9,46
1876	36	63526	245961486	531364	1753074039	3299	22845	130401739	4,49	8,04
1877	35	58169	230409707	542416	1845544814	3402	11052	92470775	2,08	5,27
1878	35	55426	215324611	556834	1930909547	3468	14418	85364733	2,66	4,63
1879	36	54940	214603235	574370	2024404442	3525	17536	93494895	3,15	4,84
1880	36	56309	224380501	595626	2129333381	3575	21256	104928939	3,70	5,18
1881	35	57743	232196824	614016	2235151275	3640	18390	105817894	3,09	4,97
1882	34	60536	250710684	633452	2354990670	3718	19436	119839395	3,17	5,36
1883	34	61752	257985476	656300	2489367285	3793	22848	134376615	3,61	5,71
1884	34	64800	280545699	683816	2650985839	3877	27516	161618554	4,19	6,49
1885	34	62813	279456701	710930	2808[illegible]					
1886	34	63184	280943387	740536	2970[illegible]					
1887	34	63653	282383176	768526	312[illegible]					
1888	34	66298	293652866	800073	3293[illegible]					
1889	35	67022	305243507	827772	3461[illegible]					
1890	37	70847	324668684	864126	3662[illegible]					
1891	38	75812	362812122	898660	3871[illegible]					
1892	38	83108	400654718	939462	4104[illegible]					
1893	40	88335	398290620	1024272	4332[illegible]					
1894	41	96737	423306676	1075165	5579[illegible]					

Die wirtſchaftliche Bedeutung der L. veranſchaulichen folgende Zahlen. Nach einer Schätzung ſollen in allen Ländern zuſammen 1860 für etwa 4800, 1870 für 17,200, 1880 für 22,400 und 1890 für rund 39,900 Mill. Mk. Lebensverſicherungen in Kraft geweſen ſein. Davon kamen auf

	Mill. Mk.		Mill. Mk.
Deutſche Geſellſchaften	4312	Schweiz	224
Öſterreich-Ungarn	1301	Frankreich	3208
Rußland	516	Italien	108
Schweden u. Norwegen	367	Kanada	495
Dänemark	100	die im Staat New York zugelaſſenen Geſellſchaften	16812
Großbritannien und Irland	11016	Auſtralien	300
Niederlande	227	die übrigen Länder	100
Belgien	60		

An der Geſamtſumme für 1860 war Deutſchland mit 1/16, für 1890 mit faſt 1/9 beteiligt.

Abbildungen oben:
Aus: Meyers Konverationslexikon, 1896

Natürliche und politiſche
Anmerckungen
über die
Todten-Zettul
der ſtadt Londen/
fürnemlich
ihreregierung/ religion/ gewerbe/ vermehrung/ lufft/ kranckheiten/ und beſondere veränderungen betreffend.
Anfangs
in Engliſcher ſprache abgefaſſet/
und offtermals durch den druck heraus gegeben
vom
Capitain JOHANNES GRAUNT,
Mitglied der Königl. Societ.
nun aber
um des groſſen nutzens willen/ der dem gemeinen weſen Teutſchlands insgemein/ und jedes orts inſonderheit aus ſolchen todten-regiſtern zuwachſen kan/
ins Deutſche überſetzet.

Leipzig/ bey Thomas Fritſchen/
1702.

Abbildung rechts:
Aus Londoner Geburts- und Sterbelisten suchte John Graunt (1620-1674) zu Gesetzmäßigkeiten der Bevölkerungsbewegung zu gelangen. Seine Aufzeichnungen sollten ihm bei der Erstellung einer Tabelle über das Absterben dienen. 1662 publizierte er darüber in London. Die von Graunt erstellte Tabelle benutzte Nikolaus Bernoulli (1687-1759) zur Schätzung der mittleren künftigen Lebenserwartung und zur Bestimmung des Preises einer Rente auf das Leben einer Person. Im Jahr 1702 erschien das in deutscher Sprache verfasste Werk von Graunt in Leipzig.

Artikel-Nr.: A23002 2009 51 Preis: 12,50 Euro